

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ  
И КИБЕРНЕТИКИ

НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

# ТИХОНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

*ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ*

*Посвящается памяти академика  
Андрея Николаевича Тихонова*

24–28 октября 2022 года



---

МОСКВА – 2022

УДК 517  
ББК 22.16  
Т46

*Заседания конференции проходят  
на факультете ВМК и физическом факультете  
Московского государственного университета*

**Тихоновские чтения** : тезисы докладов : научная конференция ;  
Т46 24–28 октября 2022 г. – Москва : МАКС Пресс, 2022. – 124 с.  
ISBN 978-5-317-06872-1  
<https://doi.org/10.29003/m3107.TRC-2022>

В издании публикуются тезисы докладов, посвященные исследованиям в области прикладной математики и информатики, которые будут прочитаны на конференции «Тихоновские чтения».

УДК 517  
ББК 22.16

**Tikhonov readings**: abstracts: scientific conference: October 24–28,  
2022. – Moscow: MAKS Press, 2022. – 124 p.

ISBN 978-5-317-06872-1

<https://doi.org/10.29003/m3107.TRC-2022>

The brochure publishes abstracts of reports that will be read at the “Tikhonov Readings” conference dedicated to research in the field of applied mathematics and computer science.

*Научное издание*

Научная конференция  
ТИХОНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

Тезисы докладов  
24–28 октября 2022 г.

Напечатано с готового оригинал-макета  
Издательство «МАКС Пресс»

Главный редактор: *Е. М. Бугачева*

Подписано в печать 24.10.2022 г.

Формат 60x90 1/16. Усл.печ.л. 7,75. Тираж 40 экз. Изд. 144.

Издательство ООО «МАКС Пресс»

Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова.

2-й учебный корпус, 527 к.

Тел.: 8(495)939-3890, 8(495)939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»  
115201, г. Москва, ул. Котляковская, д.3, стр. 13.

ISBN 978-5-317-06872-1

© Авторы докладов, 2022  
© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2022

## КОНФЕРЕНЦИЯ «ТИХОНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ 2022»

### Секция: «Нелинейная динамика: качественный анализ и управление»

1. **Высоцкий А.О., Фомичев В.В.** Точная оценка ошибки наблюдения для алгоритма «супер-скручивания» при наличии погрешности измерений ..... 9
2. **Крылов П.А., Фурсов А.С.** О достаточном условии устойчивости переключаемой аффинной системы ..... 10
3. **Самарин А.И., Фомичев В.В.** Движение в изменяющейся формации без коммуникации между агентами ..... 11
4. **Атамась Е.И.** Об обращении одного класса систем, не имеющих относительного порядка ..... 12
5. **Шутова К.** Моделирование опасных зон в задаче автономного движения с применением Q-обучения и функционально-воксельного метода описания карты препятствий ..... 13

### Секция: «Системный анализ»

1. **Трусов Н.В., Шананин А.А.** Анализ спроса на потребительский кредит в условиях санкций ..... 14
2. **Акимова Е.Д., Обросова Н.К.** Использование межотраслевого баланса для решения современных проблем межотраслевых связей ..... 15
3. **Паршиков М.В., Точилин П.А.** Об использовании методов эллипсоидального оценивания в модификации алгоритма RRT\* ..... 16
4. **Смирнов С.Н., Сотников Д.М., Заночкин А.Ю.** Аппроксимация и асимптотика в задаче суперхеджирования для бинарного опциона ..... 17
5. **Абрамова В.В.** Задача управления группой космических аппаратов: возможные постановки и методы решения ..... 18

### Секция: «Теория дифференциальных уравнений»

1. **Капустин Н.Ю.** О задачах со спектральным параметром в теории управления колебаниями нагруженной цепи ..... 19
2. **Полосин А.А.** Об асимптотике спектра и собственных функций оператора свертки с логарифмическим ядром, заданного на конечном отрезке ..... 20
3. **Денисов В.Н.** О скорости равностабилизации средних по времени от решений параболических уравнений ..... 21
4. **Коровина М.В., Смирнов И.Н.** Применение метода повторного квантования к построению асимптотик решений дифференциальных уравнений в окрестностях иррегулярных особых точек в пространствах функций экспоненциального роста ..... 22
5. **Зайцева Н.В.** Условия существования классических решений многомерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений ..... 23
6. **Нефедов В.В., Тихомиров В.В.** Об одном вариационном методе исследования устойчивости системы Валлиса ..... 24

7. Аристов А.И., Холомеева А.А. Построение точных решений теории спиновых волн .....	25
8. Аристов А.И., Моисеев Е.И., Холомеева А.А. Исследование нелинейного уравнения из электромагнитной теории с помощью теста Пенлеве .....	26

## Секция: «Математическое моделирование и вычислительные методы»

1. Сучков Е.П. Влияние ограничения на кинетическое давление в плазме в задаче реконструкции равновесия .....	27
2. Шеина Е.А. Моделирование уединенных микромагнитных конфигураций .....	28
3. Шишкин А.Г., Шаршавин А.Д. Анализ окулографических данных с помощью сверточных нейросетей .....	29
4. Андреев В.Ф., Зотов И.В., Попов А.М. Обратные задачи восстановления профиля тока и коэффициентов переноса в Токамаке .....	30
5. Афанасьев Н.А., Шагиров Н.Э. Верификация кода CABARET-MCG для многокомпонентной газовой динамики на различных модельных задачах .....	31
6. Мухин С.И., Мысова К.М., Покладюк А.Ю., Хруленко А.Б. Моделирование регуляции уровня глюкозы и инсулина в рамках самосогласованной модели сердечно-сосудистой системы. ....	32
7. Егоренков В.А., Логинова М.М., Трофимов В.А. Взаимное влияние компонент волнового вектора на эффективность адаптивных искусственных краевых условий для нелинейного уравнения Шредингера .....	33
8. Широков И.А. Влияние искусственной диссипации при моделировании сверхзвукового обтекания модели НВ-2 на основе квазигазодинамических уравнений .....	34
9. Трощив Ю.В. Воздействие скорости потока на эффективность использования фильтрующих отверстий .....	35
10. Петрова Л.И. Связь Гамильтоновых систем с уравнениями математической физики .....	36
11. Шобухов А.В. Динамическая модель электролитической диссоциации .....	37
12. Егоров В.М., Терновский В.В. Численные методы в обратной задаче управления с разрывными решениями .....	38
13. Богомоллов С.В., Кувшинников А.Е. Применение модифицированного разрывного метода частиц к задаче обтекания клина сверхзвуковым потоком газа .....	39

## Секция: «Вычислительные технологии и моделирование»

1. Смирнов М.С., Матвеев С.А. Применение функционального уравнения тета-функции к суммированию конкретного ряда .....	40
2. Лукьяненко Д.В., Шинкарев В.Д., Ягола А.Г. Учёт ошибок машинного округления при использовании градиентных методов минимизации .....	41
3. Султонов А.О., Матвеев С.А. Будзинский С.С. Малоранговая неотрицательная аппроксимация тензоров с использованием попеременных проекций и скетчинга .....	42
4. Копнина И.А., Уйданов П.В. Прекодер Томлинсона-Харашимы .....	43
5. Желтков Д.А., Валиахметов Б.И., Сукманий С.В. Метод минимальных невязок для многих правых частей с ортогональными векторами направлений .....	44
6. Мирпулатов И.П., Гасанов М.Э., Матвеев С.А., Абгарян К.К. Анализ и обработка временных рядов для многомасштабного агромоделирования .....	45

## Секция: «Системное программирование и информационные технологии»

1. <b>Авагян Д.А.</b> Построение метрик синтактико-семантического сходства предложений .....	46
2. <b>Большакова Е.И., Изюмова Д.Д.</b> Метод построения словообразовательных деревьев для русского языка .....	47
3. <b>Вылиток А.А., Лай Вэньтао.</b> Построение алгоритмов с помощью L-графов .....	48
4. <b>Грацианова Т.Ю., Рогожин Д.А.</b> Перефразирование текста на естественном языке .....	49
5. <b>Дубинин В.Д., Ефремова Н.Э.</b> Рекомендации фильмов на основе их описаний и оценок пользователей .....	50
6. <b>Полевой А.В., Корухова Ю.С.</b> Исследование алгоритмов активного шумоподавления для нестационарных сигналов .....	51
7. <b>Рязанова Е.Б., Корухова Ю.С.</b> Система поиска текстов по формулам для мобильных устройств .....	52
8. <b>Никулин Л.Р., Полякова И.Н.</b> Использование СУБД Redis в высоконагруженных системах .....	53
9. <b>Полякова И.Н., Сорокина Н.В.</b> Программный интерфейс базы знаний построения научных статей .....	54
10. <b>Широкова А.С.</b> Исследование алгоритма идентификации семантических связей в терминологической сети .....	55
11. <b>Ветров А.Г.</b> Преемственность отечественных справочных правовых систем .....	56
12. <b>Викторова Н.Б., Ли Ваньшунь, Мяо Хуэй-хуэй, Чень Жэнь. Ю Цзяньчуань, Ожигов Ю.И.</b> Моделирование ассоциации - диссоциации двухуровневых искусственных атомов в многомодовой оптической полости .....	57
13. <b>Голубцов П.В.</b> Информационные пространства для распределенной обработки данных в модели MapReduce .....	58
14. <b>Вахрушев В.Ю., Шубин М.В., Попова Н.Н., Буряк Д.Ю.</b> Методы организации параллельной предобработки данных для обучения нейросетей .....	59
15. <b>Никольский И.М., Соловьёв А.Ю.</b> Об одном параллельном алгоритме восстановления поверхности .....	60
16. <b>Цуканова М.А., Ершов Н.М.</b> Обзор нейросетевых моделей и методов в задаче грамматической коррекции русскоязычных текстов .....	61
17. <b>Гайсин Р.Р., Ершов Н.М.</b> Распознавание именованных сущностей с использованием нейросетевых алгоритмов, основанных на архитектуре трансформеров .....	62
18. <b>Тимошкин М.А., Соболев С.И.</b> Построение и использование трехмерной модели суперкомпьютерного комплекса .....	63
19. <b>Николашкин А.Г., Ершов Н.М.</b> Обзор и анализ программных средств для работы с популяционными методами оптимизации .....	64
20. <b>Машечкин И.В., Попов И.С., Казачук М.А., Фазылов Р.Р.</b> Методы обнаружения колоний бактерий на микробиологических фотоизображениях .....	65
21. <b>Машечкин И.В., Попов И.С., Казачук М.А., Трапезников М.Ю.</b> Методы определения бактериальной резистентности к антибиотикам на основе анализа микробиологических фотоизображений .....	66
22. <b>Горохов О.Е., Петровский М.И., Машечкин И.В., Кирсанова С.И.</b> Методы обнаружения критических событий в данных системных журналов .....	67
23. <b>Захаров В.О., Попов И.С.</b> Исследование и разработка методов обнаружения объектов на спутниковых снимках поверхности Земли .....	68
24. <b>Сорока А.Г., Мещеряков А.В., Герасимов С.В.</b> Применение алгоритмов обучения с подкреплением в системе оптимизации маршрутов с ограничениями вида временных окон и пропускной способности .....	69

25. Михельсон Г.В., Мещеряков А.В., Герасимов С.В., Сорока А.Г. Сравнение классических эвристических и точных методов оптимизации маршрутов в статической задаче VRP с ограничениями на грузоподъемность и временные окна доставки товаров.....	70
26. Немешаева А.А., Мещеряков А.В., Герасимов С.В. Нейросетевые методы поиска скоплений галактик в данных космического обзора Planck.....	71
27. Васильев С.М., Мещеряков А.В., Герасимов С.В. Применение машинного обучения для построения карты крупномасштабной структуры Вселенной по данным оптических обзоров неба.....	72
28. Борисов В.Д., Мещеряков А.В., Герасимов С.В. Применение машинного обучения для интеллектуального анализа данных о космических транзиентах.....	73

## Секция: «Математическая физика и обратные задачи»

1. Денисов А.М. Существование решения задачи определения коэффициента и источника в уравнении теплопроводности.....	74
2. Разгулин А.В., Величкин М.С. О новых типах стационарных и динамических структур в модели матричной Фурье-фильтрации.....	75
3. Лопушенко В.В., Еремин Ю.А. Об эффекте пространственной дисперсии в металлической оболочке несферической магнитоплазменной наночастицы.....	76
4. Цыбров Е.Г., Головина С.Г., Никитин С.Ю. Индикатриса рассеяния на совокупности диэлектрических тел.....	77
5. Романенко Т.Е., Вострикова У.Ю. Применение глубокого обучения к задаче оптического секционирования полупрозрачного слоистого объекта.....	78
6. Федотов М.В., Харитонов Д.М., Трофимов В.А. Само-компенсация самофокусировки (самокомпрессии) оптических пучков (импульсов) в среде с комбинированной нелинейностью на основе каскадных квадратичных эффектов.....	79
7. Павельева Е.А., Трофимов Д.А. Нейросетевой метод с использованием фильтров Габора для анализа изображений вен ладоней.....	80
8. Барашков И.С. Учет граничных условий в методе интегральных уравнений для задачи МТЗ.....	81
9. Тихонов И.В., Алмохамед М. Присоединенные решения в обратных задачах для эволюционных уравнений второго порядка.....	82

## Секция: «Исследование операций»

1. Васин А.А., Григорьева О.М. О выборе оптимальных накопителей для потребителей электроэнергии.....	83
2. Поспелова И.И., Сат С.О. О классификации двухкритериальных матричных игр $2 \times 2$ .....	84
3. Каплан В.С. Специфика и теоретико-игровой анализ аукциона размещения частот.....	85
4. Морозов В.В. О модели крупных закупок актива на дискретном рынке.....	86
5. Валеев А.Р. Управление ликвидностью на распределенных рынках с автоматическими маркет-мейкерами.....	87
6. Смирнов М.А., Белянкина Т.В. Оптимальная экстраполяция в непрерывных стохастических системах с коррелируемыми шумами.....	88

## Секция: «Асимптотические методы и дифференциальные уравнения с малым параметром»

1. **Никитин А.Г.** Сингулярно возмущенная краевая задача для интегродифференциального уравнения теории эффекта бареттирования ..... 89
2. **Леонов А.С., Нефедов Н.Н., Шаров А.Н., Ягола А.Г.** «Супербыстрое» решение трехмерной обратной задачи эластографии методом малого параметра ..... 90
3. **Быков А.А.** Двумерные нестационарные контрастные структуры: моделирование распространения загрязнений в водной среде ..... 91
4. **Соколов Д.Д., Юшков Е.В., Серенкова А.Ю.** Параметрический резонанс в нелинейных моделях солнечного динамо ..... 92
5. **Никулин Е.И.** Внутренние переходные слои в задаче с негладкой реакцией ..... 93
6. **Нефедов Н.Н., Орлов А.О.** Неустойчивость одномерных контрастных структур типа ступеньки в среде разрывными характеристиками ..... 94
7. **Самсонов Д.С. Левашова Н.Т.** Существование решения в виде движущегося фронта для системы уравнений типа активатор-ингибитор ..... 95
8. **Даник Ю.Э.** Построение семейств регуляторов для нелинейных дискретных систем управления по двум параметрам ..... 96
9. **Горбачев А.В, Аргун Р.Л., Левашова Н.Т., Лукьяненко Д.В.** Об особенностях численного решения коэффициентных обратных задач для нелинейных уравнений типа реакция-диффузия-адвекция с данными о положении фронта реакции ..... 97
10. **Чунжук Е.А., Левашова Н.Т.** Верхнее и нижнее решения в задаче о распространении фронта в среде с разрывными характеристиками и (стендовый) ..... 98
11. **Хасаева Т.Т, Михайлов Е.А.** Контрастные структуры для магнитных полей в периферийных областях галактик (стендовый) ..... 99
12. **Быков А.А.** Развитие теории парциальных условий излучений в работах А.Г.Свешникова с 50-х по 70-е годы XX века (стендовый) ..... 100

## Секция: «Математическая кибернетика»

1. **Ложкин С.А., Зизов В.С.** Оценки функции Шеннона для площади клеточных схем из функциональных и коммутационных элементов в одном базисе ..... 101
2. **Попов Е.А.** О сложности реализации некоторых симметрических функций самокорректирующимися контактными схемами ..... 102
3. **Владимирова Ю.С.** О методах программного представления выражений логики Н.П.Брусенцова ..... 103
4. **Бухман А.В.** Об одной системе тождеств для минимизации обобщенных полиномов ..... 104

## Секция: «Теория вероятностей и математическая статистика»

1. **Кудрявцев А.А., Шестаков О.В.** О предельных распределениях для статистических оценок параметров дигамма-распределения, построенных по выборке случайного объема ..... 105
2. **Берговин А.К., Ушаков В.Г.** Приоритетная система  $GI | G | 1$  с профилактиками обслуживающего прибора ..... 106

3. Хохлов Ю.С., Куковкина М.А., Ван Г.С. Верхние оценки вероятности переполнения большого буфера для некоторых моделей трафика с неоднородным входящим потоком .....	107
4. Пахненко И.П., Захарова Т.В. Обратная задача магнитоэнцефалографии с двумя диполями .....	108
5. Клименко В.К., Захарова Т.В. Проверка биоэквивалентности при наличии пропущенных данных .....	109
6. Макаренко В.А., Шевцова И.Г. Моментное неравенство с применением к оценкам скорости сходимости в центральной предельной теореме для пуассоновских случайных сумм .....	110

### **Секция: «Обратные задачи управления»**

1. Никольский М.С. О непрерывности времени оптимального быстрогодействия как функции от начального состояния управляемого объекта .....	111
2. Хайлов Е.Н., Григорьева Э.В. Оптимальное чередование лечения и его отсутствия в математической модели меланомы .....	112
3. Отакулов С., Собирова Г.Д. Об одной минимаксной задаче для управляемого дифференциального включения с дискретным параметром .....	113
4. Семендяева Н.Л., Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В., Орлов С.М. Исследование динамики модели распространения инфекционного заболевания .....	114
5. Сурков П.Г. О задаче динамического восстановления тонкой структуры возмущения в системе дифференциальных уравнений дробного порядка .....	115
6. Гончарова М.Н., Самсонов С.П. О множестве управляемости для одного объекта с фазовым ограничением .....	116
7. Горьков В.П., Григоренко Н.Л. Терминальные задачи движения квадрокоптера .....	117
8. Горьков В.П., Григоренко Н.Л. К задаче конструирования управлений в нелинейных дифференциальных играх .....	118
9. Кулевский А.В. О неединственности решения в терминальной задаче оптимального управления .....	119
10. Жуковский В.И., Жуковская Л.В., Мухина Ю.С. О векторных гарантиях в многокритериальных задаче при неопределенности .....	120

**ТОЧНАЯ ОЦЕНКА ОШИБКИ НАБЛЮДЕНИЯ ДЛЯ АЛГОРИТМА  
“СУПЕР-СКРУЧИВАНИЯ” ПРИ НАЛИЧИИ ПОГРЕШНОСТИ  
ИЗМЕРЕНИЙ**

Высоцкий А.О.<sup>1</sup>, Фомичев В.В.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ,  
e-mail: vysotskiial@gmail.com

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ,  
e-mail: fomichev@cs.msu.ru

Одними из наиболее часто используемых методов для решения задач управления в условиях неопределенности, т.е. при наличии неизвестных входных сигналов, является использование так называемого алгоритма “супер-скручивания” [1]. Для решения задачи наблюдения, в случае, когда выходной сигнал известен точно, были получены [2,3] условия, при которых наблюдатели, использующие алгоритм “супер-скручивания” дают асимптотически точные оценки вектора состояния.

В рамках работы рассматривается применение такого алгоритма для решения задачи наблюдения при условии наличия погрешности измерения выходного сигнала системы. При этом считается, что погрешность измерения выхода равномерно ограничена.

Для того, чтобы оценить установившуюся ошибку наблюдения для наблюдателей, основанных на алгоритме “супер-скручивания”, была построена вспомогательная система, траектория которой ограничивает траектории системы для ошибок наблюдения при любых ограниченных погрешностях измерения и входных возмущениях.

Анализ ограничивающей системы показывает, что при выборе параметров, обеспечивающем асимптотически точную оценку при отсутствии погрешности измерений, ее траектории сходятся в окрестность начала координат. Далее приводятся точные оценки размеров этой окрестности.

Проведено численное исследование, подтверждающее полученные аналитические оценки размеров области.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00288).

**Литература**

1. Arie Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control //International Journal of Control (1993) **58**, №6, с.1247–1263.
2. Jaime A. Moreno, Marisol Osorio. Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm //IEEE Transactions on Automatic Control (2012) **57**, №4, с.1035–1040.
3. Фомичев В.В., Высоцкий А.О. Алгоритм построения каскадного асимптотического наблюдателя для системы с максимальным относительным порядком // Дифференциальные уравнения (2019) **55**, № 4, с.567–573.

# О ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ

Крылов П.А.<sup>1</sup>, Фурсов А.С.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ,  
e-mail: pavel@leftsystem.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ,  
e-mail: fursov@cs.msu.ru

В настоящее время кусочно-линейные системы удаётся эффективно использовать для аппроксимации нелинейных аффинных систем управления [1]. Алгоритмы управления, разработанные для кусочно-линейных аппроксимаций, позволяют успешно применять их и для исходных нелинейных систем [2, с. 97; 3]. Если для нелинейной системы рассматривается некоторое семейство аппроксимирующих кусочно-линейных систем, то такое семейство, фактически, представляет собой переключаемую аффинную систему с заданным множеством переключающих сигналов.

Рассмотрим разбиение евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  на  $m$  замкнутых выпуклых многогранников  $\overline{M}_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ). При этом считаем, что  $0 \in M_1$  (где  $M_i$  — внутренность многогранника  $\overline{M}_i$ ). Так как пара выпуклых многогранников, не имеющих общих внутренних точек, может иметь не более одной общей грани, то в описанном разбиении каждый многогранник имеет не более  $(m - 1)$  граней. Плоскость, разделяющую соприкасающиеся многогранники  $\overline{M}_i$  и  $\overline{M}_j$ , обозначим  $P_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle n_{ij}, x \rangle = d_{ij}\}$ . Для определенности будем полагать  $n_{ij} = \mathbf{0}, d_{ij} = 1$ , если многогранники  $\overline{M}_i$  и  $\overline{M}_j$  не пересекаются. Таким образом, можно записать  $\overline{M}_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle n_{ij}, x \rangle \leq d_{ij}\}$ . Обозначим через  $N = [n_{ij}]_{i,j=1}^m$  массив нормалей и через  $D = (d_{ij})$  матрицу из  $\mathbb{R}^{m \times m}$ .

Рассмотрим переключаемую скалярную по входу аффинную систему

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma + b_\sigma u, \quad \sigma \in S(F), \quad (1)$$

где  $\sigma(x; N, D) : \mathbb{R}^n \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$  — кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал), принимающая постоянное значение  $i$  на каждом открытом выпуклом многограннике  $M_i$ , задаваемым парой  $(N, D)$ .

Ставится задача исследования устойчивости нулевого решения системы (1), замкнутой обратной связью  $u = -kx$ ,

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma - b_\sigma kx, \quad \sigma \in S(F). \quad (2)$$

Была доказана теорема о достаточных условиях глобальной равномерной устойчивости нулевого решения системы (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект No 22-21-00162).

## Литература

1. Rewinski M., White J. Model order reduction for nonlinear dynamical systems based on trajectory piecewise-linear approximations // Linear Algebra and its Applications 415 (2006), 426–454.
2. Johansson M. Piecewise linear control system // Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003.
3. Rodrigues L., How J. Synthesis of piecewise-affine controllers for stabilization of nonlinear systems // Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control 3: 2071-2076, Vol. 3., January 2004.

## ДВИЖЕНИЕ В ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ФОРМАЦИИ БЕЗ КОММУНИКАЦИИ МЕЖДУ АГЕНТАМИ

Самарин А.И.<sup>1</sup>, Фомичев В.В.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ,  
e-mail: liotbiu1@gmail.com

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ,  
e-mail: fomichev@cs.msu.ru

Мы рассматриваем двумерных агентов, ускорением которых мы можем управлять. Под движением в изменяющейся формации мы понимаем задачу консенсуса, в которой желаемое расстояние между агентами не фиксировано, а меняется с течением времени. Агентам доступна информация только о расстоянии до соседей, они не могут передавать другую информацию, как скорость или ускорение.

При применении линейной обратной связи возникает неустранимая ошибка, которую можно уменьшить только за счет глубокой обратной связи. В работе [1] предложен подход к робастному достижению консенсуса при наличии помех. Мы модифицировали данный подход: теперь помеха – это не внешнее возмущение, а изменения в формации и неизвестные действия других агентов. Однако, так как подход требует знания скорости других агентов, то для ее оценки мы использовали наблюдатель, впервые предложенный в работе [2]. При известной мажоранте помехи наблюдатель можно настроить так, чтобы он за конечное время дал точную оценку скорости агента [3]. Результаты [1-3] применимы, когда желаемое расстояние между агентами меняется с ограниченной скоростью.

Проведенное моделирование показало применимость подхода. Ошибка консенсуса за конечное время сходится к нулю при произвольных входных сигналах. Точное математическое доказательство и алгоритм подбора коэффициентов – направления для будущей работы.

### Литература

1. Pilloni A. et al. Sliding mode-based robustification of consensus and distributed optimization control protocols //IEEE Transactions on Automatic Control (2020) **66**, №.3, pp.1207-1214.
2. Емельянов С.В., Коровин С.К., Левантовский Л.В. Новый класс алгоритмов скольжения второго порядка //Математическое моделирование (1990) **2**, №.3, с. 89-100.
3. Фомичев В.В., Высоцкий А.О. Алгоритм построения каскадного асимптотического наблюдателя для системы с максимальным относительным порядком // Дифференциальные уравнения (2019) **55**, № 4, с.567–573.

# ОБ ОБРАЩЕНИИ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ, НЕ ИМЕЮЩИХ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА

Атамась Е.И.<sup>1</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ,  
e-mail: eatamas@cs.msu.ru

Будем рассматривать линейную управляемую систему с соизмеримыми запаздываниями, записанная в алгебраической форме:

$$\dot{x} = Ax(d) + Bu(d), y = Cx(d),$$

Где  $x \in R^n, u \in R^l, y \in R^l$  — фазовый вектор, вход и выход системы соответственно,  $A, B, C$  — полиномиальные матрицы соответствующих порядков от алгебраической переменной  $d$ , отвечающей оператору запаздывания.

При решении задачи обращения [1] такой системы важную роль играет понятие относительного порядка

**Определение 1.** Вектор  $r \in N^l$  называется вектором относительного порядка системы, если выполнены следующие условия:

- $C_i A^{r_i-1} B \neq 0$ , и, если  $r_i > 1$ , то  $C_i A^{j-1} B = 0, j = 1, 2, \dots, l$ ;
- определитель матрицы  $H = \begin{pmatrix} C_1 A^{r_1-1} B \\ \dots \\ C_l A^{r_l-1} B \end{pmatrix}$  есть ненулевой полином.

Если у системы есть относительный порядок, то её можно преобразовать к форме с выделением нулевой динамики [3], что является важным шагом в решении задачи обращения. К сожалению, относительный порядок у системы определен не всегда.

Для линейных систем с соизмеримыми запаздываниями ранее было предложено обобщение понятия относительного порядка с более слабыми требованиями [2].

**Определение 2.** Вектор  $r \in N^l$  называется вектором главного неполного относительного порядка, если  $r$  — вектор НОП, и для любых индексов  $i_1, \dots, i_k$ , таких что  $r_{i_1} = \dots = r_{i_k}$ , определитель Грама строк  $C_{i_1} A^{r_{i_1}-1} B, \dots, C_{i_k} A^{r_{i_k}-1} B$  есть ненулевой полином.

Данная работа посвящена описанию того, как описанные ранее в [1] алгоритмы обращения могут быть применены к системам, для которых определен лишь главный неполный относительный порядок. Описываются условия обратимости и алгоритм обращения для таких систем.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МК-4905.2021.1.

## Литература

1. Атамась Е. И., Ильин А. В., Фомичев В. В. Обращение векторных систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения (2013), **49**, № 11, с. 1363–1369.
2. Фомичев В. В., Атамась Е. И., Роговский А. И. О приведении систем с запаздыванием к виду с относительным порядком // Дифференциальные уравнения (2022), **58**, № 3, с. 425–432.
3. Ильин А. В., Атамась Е. И., Фомичев В. В. О приведении систем с запаздыванием к форме с выделением нулевой динамики // Доклады Академии наук. (2018), **480**, № 1, с. 11–15.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПАСНЫХ ЗОН В ЗАДАЧЕ АВТОНОМНОГО ДВИЖЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ Q-ОБУЧЕНИЯ И ФВ-МЕТОДА ОПИСАНИЯ КАРТЫ ПРЕПЯТСТВИЙ

Шутова К.Ю.<sup>1</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ,  
e-mail: shutova.k.u@yandex.ru

Требуется найти результирующее ускорение группы динамических агентов с уравнением движения  $\begin{cases} \dot{q}_i = p_i \\ \dot{p}_i = u_i \end{cases}$ . Здесь  $q_i, p_i, u_i \in \mathbb{R}^m$  – координаты, скорость и ускорения роботов,  $m = \overline{2, 3}$ ,  $i$  – робот. -агент является членом группы роботов с динамикой движения  $\dot{q}_i = u_i$ . Введем скалярную функцию  $\rho_h(z)$ , функцию действия  $\phi_\alpha(z)$ , представленные формулами (1), (2). Величины  $d, r$ , соответственно, минимальное расстояние и радиус видимости между агентами.

$$\rho_h(z) = \begin{cases} 1, & z \in [0, h); \\ \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \left( \pi \frac{z-h}{1-h} \right) \right), & z \in [h, 1); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

$$\phi_\alpha(z) = \rho_h(z) \phi(z-d). \quad (2)$$

Исследованы следующие сценарии движения. *Сценарий 1* основан на правилах Рейнольдса [1]:  $u_i = u_i^\alpha = f_i^g + f_i^d$ . *Сценарий 2* – на согласовании стайного поведения по *Сценарию 1* и притяжении к цели:  $u_i = u_i^\alpha + u_i^\gamma$ , где  $u_i^\gamma = -c_1(q_i - q_r) - c_2(p_i - p_r)$ . *Сценарий 3* – на согласовании стайного поведения по *Сценарию 1*, притяжении к цели по *Сценарию 2* и предотвращении столкновений с препятствиями:  $u_i = u_i^\alpha + u_i^\beta + u_i^\gamma$ , где  $u_i^\beta = \rho_h\left(\frac{z}{d}\right) (\sigma(z-d) - 1)$ . Здесь  $\sigma$  – сигмоидальная функция.

Следующий этап объединяет преимущества стайного поведения для создания системы, информирующей агентов о хищнике [2]. Используется независимое и совместное Q-обучение (3–4).

$$Q_i^{k+1}(s_i, a_i) \leftarrow Q_i^k(s_i, a_i) + \alpha \left[ r_i^k + \gamma \max_{a'_i \in A_i} Q_i^k(s'_i, a'_i) - Q_i^k(s_i, a_i) \right]. \quad (3)$$

$$Q_i^{k+1}(s_i, a_i) \leftarrow \omega Q_i^k(s_i, a_i) + (1 - \omega) \frac{\sum_{j=1}^{|N_i|} Q_j^k(s_j, a_j)}{|N_i|}. \quad (4)$$

Выявлена проблема пересчета на каждом шаге сил притяжения и отталкивания. Рассматривается модель функционально-воксельного моделирования (ФВ) [3]. ФВ-моделью любого полигона является набор M-образов проекции нормали для функции модели контура на плоскость. Для проведения расчетов нет необходимости обращаться к изначальному виду функции. Карта изменения областей прорисовывается один раз, что позволяет предотвращать столкновения.

## Литература

1. C.W. Reynolds. Flocks, herds, and schools: A distributed behavioral model, in Comput. Graph. //ACM SIGGRAPH'87 Conf. Proc., vol. 21, Jul. 1987, pp. 25–34.
2. La H.M, Lim R., Sheng W. Multirobot cooperative learning for predator avoidance //IEEE Trans Control Syst Technol (2014) 23, No.1, pp.52–63.
3. Толоч А.В. Функционально-воксельный метод в компьютерном моделировании //Москва, Физмалит, 2016.

## АНАЛИЗ СПРОСА НА ПОТРЕБИТЕЛЬСКИЙ КРЕДИТ В УСЛОВИЯХ САНКЦИЙ

Трусов Н.В.<sup>1</sup>, Шананин А.А.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СА; МФТИ, ФУПМ, кафедра АСuP; ФИЦ ИУ РАН; Московский Центр Фундаментальной и Прикладной Математики  
e-mail: trunick.10.96@gmail.com

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СА; МФТИ, ФУПМ, кафедра АСuP; ФИЦ ИУ РАН; РУДН; Московский Центр Фундаментальной и Прикладной Математики, e-mail: alexshan@yandex.ru

Потребительский кредит является важным элементом экономических отношений в России. Помимо поддержки платёжеспособного спроса населения, потребительский кредит является высоко прибыльным активом для коммерческих банков. Большинство заёмщиков в России имеют низкие реальные доходы, что приводит к росту потребительского кредитования. Сложившаяся ситуация может превратиться в финансовую пирамиду, а заёмщики в среднесрочной перспективе не будут способны обслуживать взятые кредиты, что породит кризис банковской системы. В настоящее время в условиях жёстких экономических санкций резко обострилась проблема роста задолженности по потребительскому кредиту, увеличиваются инфляционные ожидания.

Моделирование экономического поведения домашних хозяйств основывается на модели рамсеевского типа [1]-[4]. Модель идентифицирована по данным российской статистики. Разработано специализированное программное обеспечение, с помощью которого исследованы данные обследований домашних хозяйств, собираемые Федеральной службой государственной статистики. Проведён анализ динамики экономического положения заёмщиков в разных регионах РФ, с учётом резкого изменения денежно-кредитной политики и роста инфляционных ожиданий. Рассмотрены различные варианты государственной поддержки и денежной политики с точки зрения их влияния на состояние рынка потребительского кредитования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 20-07-00285).

### Литература

1. A.A.Shananin, N.V.Trusov. The household behaviour modelling based on Mean Field Games approach // Lobachevskii Journal of Mathematics (2021) **42**, №7, pp.1738-1752.
2. A.A.Shananin, M.V.Tarasenko, and N.V.Trusov. Consumer Loan Demand Modeling // Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends (2021), CCIS, **1476**, pp.417-428.
3. М.В.Тарасенко, Н.В.Трусов, А.А.Шананин. Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России // Журнал вычислительной математики и математической физики (2021) **61**, №6, с.1034-1056.
4. Рудева А.В., Шананин А.А. Синтез управления в модифицированной модели Рамсея с учётом ограничения ликвидности // Дифференциальные уравнения (2009) **45**, № 12, с.1799-1803.

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СОВРЕМЕННЫХ ПРОБЛЕМ МЕЖОТРАСЛЕВЫХ СВЯЗЕЙ

Акимова Е.Д.<sup>1</sup>, Обросова Н.К.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СА, e-mail: jane\_muse@mail.ru

2) ФИЦ ИУ РАН; Московский центр фундаментальной и прикладной математики,  
МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СА; МФТИ, факультет ФУПМ,  
кафедра Анализ систем и решений, e-mail: nobrosova@yandex.ru

Межотраслевой баланс является одним из важнейших инструментов анализа экономической информации о производственной деятельности. Моделирование межотраслевых связей позволяет анализировать изменения финансовых потоков при корректировке спроса на товары и услуги конечных потребителей (государственного заказа, экспорта, домашних хозяйств).

Первый квартал 2022 года характеризуется серьезными изменениями в мировой экономической системе, которые приводят к изменению экспортно-импортных потоков в российской экономике. Математическое моделирование межотраслевого взаимодействия позволяет оценить потенциальное влияние этих изменений на экономику России. Целью данной работы является выявление наиболее уязвимых, с точки зрения влияния санкций, отраслей российской экономики и построение диапазона изменения ВВП в различных сценариях санкционного давления на экономику.

Для решения данной задачи использовался линейный межотраслевой баланс В.В. Леонтьева, который позволяет строить прогноз изменения выпуска отраслей в различных сценариях изменения конечного спроса в предположении о постоянстве норм материальных затрат отраслей экономики на выпуск единицы продукции. В качестве исходных данных для построения приближенной оценки постоянной технологической матрицы Леонтьева рассмотрены таблицы ресурсов и использования за 2012-2019 годы, доступные на сайте Росстата [1]. Для них находилась приближенная таблица постоянных норм затрат как решение задачи оптимизации. На основе этой таблицы и результатов, полученных в статье [2] для модели Леонтьева, оценивался ВВП и его чувствительность к санкционному давлению на экспорт и импорт.

## Литература

1. Url: <https://rosstat.gov.ru/accounts>
2. N. Obrosova et al. On the comparison of two approaches to intersectoral balance analysis // J. Phys.: Conf. Ser. (2021) 2131 022112.

# ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДОВ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ В МОДИФИКАЦИИ АЛГОРИТМА RRT\*

Паршиков М.В.<sup>1</sup>, Точилин П.А.<sup>2</sup>

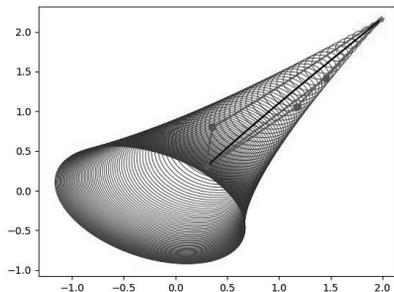
1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра системного анализа,  
e-mail: miron232734@gmail.com

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра системного анализа,  
e-mail: tochilin@cs.msu.ru

Работа посвящена решению задачи о переводе управляемого объекта из начальной позиции в заданное целевое множество за наименьшее возможное время, при условии обигания препятствий.

За основу предлагаемого решения был взят алгоритм "быстро растущих" случайных деревьев RRT\* [1], так как точное решение такой задачи является очень трудоёмким с точки зрения вычислений из-за большой размерности вектора фазовых переменных, нелинейной динамики и сложной структуры препятствий. Базовый метод был модифицирован под задачи, в которых динамика объекта описывается конкретными дифференциальными уравнениями:  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ . Для этого на каждой итерации нового алгоритма EllipsoidalRRT\* с помощью методов эллипсоидального оценивания [2, 3] решается подзадача о переводе системы из точки в точку. Решение такой подзадачи включает: 1) построение совокупности внутренних эллипсоидальных оценок множества разрешимости рассматриваемой управляемой системы; 2) вычисление позиционного управления, решающего подзадачу, и полученного за счёт "прицеливания" на эллипсоидальные оценки; 3) получение искомого программного управления из построенной позиционной стратегии.

Ниже приведен пример работы алгоритма на очередной итерации.



## Литература

1. Karaman S., Frazzoli E. Sampling-based algorithms for optimal motion planning // The international Journal of Robotics Research Princeton Univ. (2011) **30**, I. 7, pp. 846 – 894.
2. Kurzhanski A.B., Varaiya P. On ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part II: internal approximations, box-valued constraints // Optimization Methods and Software (2002) **17**, p. 207 – 237.
3. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Reachability analysis for uncertain systems – the ellipsoidal technique // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. B. (2002) **9**, I. 3, pp. 347 – 367.

## АППРОКСИМАЦИЯ И АСИМПТОТИКА В ЗАДАЧЕ СУПЕРХЕДЖИРОВАНИЯ ДЛЯ БИНАРНОГО ОПЦИОНА

Смирнов С.Н.<sup>1</sup>, Сотников Д.М.<sup>2</sup>, Заночкин А.Ю.<sup>3</sup>

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, ВМК, СА, e-mail: s.n.smirnov@gmail.com

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, ВМК, СА, e-mail: dmitrysotni@gmail.com

3) *Alber Blanc*, e-mail: andrey.zanochkin@gmail.com

В рамках гарантированного детерминистского подхода к модели финансового рынка с дискретным временем (см. [1]) анализируются решения уравнений Беллмана-Айзекса, возникающих при суперхеджировании бинарного опциона европейского типа. На каждом временном шаге продавец опциона (хеджер) использует хеджирующую стратегию — формирует с учетом истории цен (в данном случае достаточно использовать текущую цену) позиции рисковому и безрисковому активам, с целью обеспечить полное покрытие обязательств в терминальный момент при любом допустимом сценарии поведения рынка. Основным математическим объектом в задаче суперхеджирования являются уравнения Беллмана-Айзекса, решения которых интерпретируются как объем резервов на текущий момент времени при известной предистории цен, необходимый для полного покрытия обязательств по опциону в терминальный момент.

Интерес к бинарному опцион обусловлен разрывностью функции выплат. Рассматривается мультипликативная модель, в которой торговые ограничения отсутствуют, а динамика дисконтированных цен рискового актива имеет вид  $X_t = M_t X_{t-1}$ , где мультипликатор  $M_t$  лежит в априорно заданном отрезке  $[a, a^{-1}]$  и  $0 < a < 1$ . Эта задача рассматривалась в [2], где были получены ряд свойств решений и численный алгоритм. В настоящей работе получены новые аналитические свойства решения, позволяющие найти смешанную стратегию рынка, отвечающую игровому равновесию на каждом временном шаге, т.е. описывающую наиболее неблагоприятное для хеджера поведение рынка. Такой смешанной стратегии отвечает процесс цен, который в логарифмической шкале, как оказалось, хорошо аппроксимируется несимметричным случайным блужданием с двумя барьерами. Используя методы [3] доказано, что при стремлении числа шагов к бесконечности дискретный процесс цены при подходящей нормировке имеет предел в смысле слабой сходимости, которым является остановленное геометрическое броуновское движение с барьером, равным цене исполнения при экспирации опциона.

### Литература

1. Смирнов С.Н., Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: модель рынка, торговые ограничения и уравнения Беллмана-Айзекса // Математическая теория игр и ее приложения (2018) **10**, №4, с.59–99.
2. Смирнов С.Н., Заночкин А.Ю. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства бинарного европейского опциона // Вестник ТвГУ (2020), Прикладная математика, №1, с.29–59.
3. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер // М.: Наука – 1-е издание – 1977.

# ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ГРУППОЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ: ВОЗМОЖНЫЕ ПОСТАНОВКИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Абрамова В.В.

*МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Системного анализа,  
e-mail: ruvasha@yandex.ru*

Управление роём малых космических аппаратов, движущихся по околоземной орбите – тематика, представляющая все больший и больший научный интерес. В рамках доклада рассматриваются различные постановки задачи оптимального управления, связанной с управлением группой космических аппаратов. Основное внимание уделяется двум постановкам – общей, связанной с управлением группой при избежании столкновений с препятствиями, и специфической, связанной с задачей выведения набора объектов на целевые орбиты. Для каждой из постановок обсуждается возможный подход к решению соответствующей задачи.

В качестве базовой постановки рассматривается вариант задачи группового управления (когда объекты группы, космические аппараты, и соответствующие им управления описываются столбцами исходных матриц, и динамическая система имеет так же матричный вид), где целью является переводение группы из одной области пространства в другую без столкновения со внешними объектами, например, космическим мусором. Данная задача является вариацией классической постановки задачи группового управления, описанной в [1]. Рассматривается возможность перехода от декартовых координат к сферическим и преимущества такого описания. При использовании двигателей малой тяги, разумно в дополнение к вышесказанному перейти от класса кусочно-непрерывных управлений к импульсным управлениям [2]. Использование импульсных управлений в рамках теории группового управления представляет собой интересную и сложную теоретическую задачу, для нахождения решения которой возможно применение гамильтонова формализма.

В качестве альтернативы приводится задача выведения набора объектов на целевые орбиты с помощью аппарата-носителя [3]. Формализация данной задачи требует введения промежуточных ограничений. Возможно сведение данной задачи к стандартной задаче оптимального управления, к которой применим аналог Принципа максимума Л.С.Понтрягина. Также, в рамках подхода к поиску решения, опирающегося на Принцип максимума, можно поставить задачу оптимального управления с линейными ограничениями, аналогичную упомянутой в предыдущем абзаце, но без перехода к матричным уравнениям. Применительно к данной задаче также возможно исследование достаточных условий оптимальности решения.

## Литература

1. Куржанский А.Б. Задача о нестолкновениях при групповом движении в условиях препятствий // Труды Института математики и механики УрО РАН, том 21, №2. – 2015 – 134-149 с.
2. Kurzhanski A.B., Daryin A.N. Dynamic Programming for Impulse Feedback and Fast Controls. The Linear Systems Case // Springer. – 2020.
3. Samylovskiy I.A., Abramova V.V., Filippov A.A. Optimal Control Problems and Cross-Platform Instrumental Software Related to Constellation Cooperative Control // Milano: 11th International Workshop on Satellite Constellations & Formation Flying – 2022.

## Секция: «Теория дифференциальных уравнений»

### О ЗАДАЧАХ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ НАГРУЖЕННОЙ ЦЕПИ

Капустин Н.Ю.<sup>1</sup>

1) МГУ, факультет ВМК, кафедра ФАиП, e-mail: n.kapustin@bk.ru

При изучении смешанной задачи для уравнения колебания нагруженной цепи с учетом воздействия внешних сил возникает спектральная задача

$$xX''(x) + X'(x) + \lambda xX(x) = 0, \quad 0 < a < x < b, \quad (1)$$

$$X(a) = 0, \quad X'(b) - \lambda dX(b) = 0, \quad (2)$$

с отличным от нуля действительным коэффициентом  $d$ . Решением задачи (1)-(2) является система собственных функций  $\{X_n(x)\}$ , записанная с использованием функций Бесселя первого и второго порядка.

В работе доказаны теоремы о базисности Рисса системы собственных функций  $\{X_n(x)\}$ , построена в явном виде биортогонально сопряженная система функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284 и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-51-18006 Болг-а).

#### Литература

1. Kapustin N, Polosin A. On a mixed problem for oscillation of a heavy chain with loads. AIP Conference Proceedings. 2015. V. 1690. С. 040003-1-040003-5.
2. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка //М.: Наука, 1964.
3. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики //М.: Наука, 1984.
4. Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю. О базисности в пространстве  $L_p$  систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения (2000) 36, № 10, с.1357–1360.
5. Капустин Н.Ю., Моисеев Т.Е. О спектральной задаче со спектральным параметром в граничном условии в теории уравнения радиального распространения тепла. // Дифференц. уравнения. (2007) 43, № 10, с.1382–1386.
6. Гуляев Д.А. О задаче с граничным условием третьего рода, одно из которых содержит спектральный параметр. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Москва, 2013.
7. Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю. Об оценке решения одной задачи для парабологоперболического уравнения с помощью рядов Фурье. // Дифференц. уравнения. (2003) 43, № 5. с.656–662.

# ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ, ЗАДАННОГО НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

Полосин А.А.<sup>1</sup>

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра функционального анализа и его применений, e-mail: alexei-polosin@mail.ru

Как известно, одномерные интегральные уравнения типа свертки, рассматриваемые на конечном отрезке, в общем случае не решаются в квадратурах, в отличие от аналогичных уравнений, рассматриваемых на всей прямой или на полупрямой, поэтому при исследовании их спектра приходится прибегать к асимптотическим методам.

Один из наиболее распространенных методов заключается в применении преобразования Фурье, благодаря чему исходная задача сводится к задаче сопряжения аналитических функций.

В настоящей работе рассмотрена задача на собственные значения для интегрального оператора типа свертки с логарифмическим ядром, заданного на конечном отрезке:

$$u(x) = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|t-x|} u(t) dt, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

С помощью преобразования Фурье задача последовательно сводится к задаче сопряжения и к сингулярному (особому) интегральному уравнению на полупрямой с несжимающим интегральным оператором. В работе показано, что главная часть полученного интегрального уравнения допускает обращение в явном виде.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284 и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-51-18006 Болг- а).

## Литература

1. Ukai S. Asymptotic Distribution of Eigenvalues of the Kernel in the Kirkwood-Riseman Integral Equation // J. of Math. Physics. 1971. V. 12. № 1. P. 83-92.
2. Пальцев Б.В. Уравнения свертки на конечном интервале для одного класса символов, имеющих степенную асимптотику на бесконечности // Изв. АН СССР, сер. матем. 1980. Т. 44. № 2. С. 322–394.
3. Пальцев Б.В. Асимптотика спектра интегральных операторов свертки на конечном интервале с однородными полярными ядрами // Изв. РАН, сер. матем. 2003. Т. 67. № 4. С. 67–154.
4. Сахнович Л.А. Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке. УМН. 1980. Т. 35. № 4. С. 69-129.
5. Полосин А.А. О спектре и собственных функциях оператора свертки на конечном интервале с образом ядра – характеристической функцией // Дифф. уравнения. 2017. Т. 53. № 9. С. 1180-1194.
6. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
8. Полосин А.А. О решении одного сингулярного интегрального уравнения // Дифф. уравнения. 2003. Т. 39. № 5. С. 710-714.

# О СКОРОСТИ РАВНОСТАБИЛИЗАЦИИ СРЕДНИХ ПО ВРЕМЕНИ ОТ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Денисов В.Н.

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ОМ,  
e-mail: vdenisov2008@yandex.ru

Рассмотрим задачу Коши для параболического уравнения

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, u(x, 0) = u_0(x), \quad (1)$$

где  $u_0(x)$  - непрерывная в  $E^N$  функция, удовлетворяющая условию

$$|u_0(x)| \leq C(1 + |x|)^m, m > 0. \quad (2)$$

Оператор  $L$  в (1) является равномерно параболическим, 2-го порядка, с коэффициентами, зависящими от  $x$ .

Известно [2], что тогда решение допускает оценки типа Аронсона. Поэтому для  $u(x, t)$  справедливо неравенство

$$|u(x, t)| \leq C(1 + |x|^m + t^{m/2}). \quad (3)$$

Средние Абеля по  $t$  от  $u(x, t)$  определим по обычной формуле из [3]  $A_R u(x, \circ)$ . Средние Чезаро порядка  $\alpha$  по  $t$  от  $u(x, t)$  определим обычным равенством из [3]  $C_R^\alpha u(x, \circ)$ .

**Теорема.** Если для  $u_0(x)$  выполнено (2), и при  $\alpha = \alpha(R)$  существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\alpha(R)}{R^m} = 1, \quad (4)$$

тогда для разности

$$\Delta(x, R) = A_R u(x, \circ) - C_R^{\alpha(R)} u(x, \circ)$$

справедлива оценка

$$|\Delta(x, R)| \leq \frac{C(x)}{R^{m/2}}, \quad (5)$$

равномерная по  $x$  на каждом компакте  $K$  в  $E^N$ .

Из оценки (5) вытекает теорема о равномерной по  $x$  на каждом компакте равностабилизации средних Абеля и средних Чезаро по  $t$   $C_R u(x, \circ)$  со скоростью  $C(R^{-m/2})$ .

## Литература

1. Денисов В.Н., Жиков В.В. О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений. // Мат. Заметки (1985) **37**, № 6, с.834-851.
2. Аронсон (Aronson) Bounds for the fundamental solutions of a parabolic equation. // Bull. Amer. Math. Soc. (1967) **73**, p.890-896.
3. Харди Г.Г. Расходящиеся ряды. // М.: 2006.

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОВТОРНОГО КВАНТОВАНИЯ К ПОСТРОЕНИЮ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТЯХ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА

Коровина М.В.<sup>1</sup>, Смирнов И.Н.<sup>2</sup>

- 1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ОМ,  
e-mail: betelgeuser@yandex.ru
- 2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ОМ,  
e-mail: ismirnov@cs.msu.ru

Целью исследования являются уравнения с голоморфными коэффициентами

$$a_n(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + a_{n-1}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x) + \dots + a_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i u(x) + \dots + a_0(x)u(x) = 0 \quad (1)$$

Здесь  $a_i(x), i = 0, \dots, n$  – голоморфные функции. Пусть коэффициент  $a_n(x)$  обращается в ноль в окрестности некоторой точки, без ограничения общности будем считать, что эта точка ноль. Проблема сформулированная Пуанкаре состоит в построении равномерных асимптотик решений уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярных особых точек, именно этой проблеме и посвящена данная работа. Для решения этой проблемы используется Метод Повторного Квантования, основой которого является преобразование Лапласа-Бореля. Для развития метода Повторного Квантования получена

**Теорема 1.** Асимптотика функции  $V^{-1}e^{-\frac{\alpha}{p}g(p)}$  в окрестности нуля имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n+k} \exp\left(\sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i^j}{r^{n+k}}\right) r^{\frac{\sigma_j}{n+k}} \sum_l c_l^j r^{\frac{l}{n+k}},$$

где  $\alpha_{n-1}^j, j = 1, \dots, k + n$  корни полинома  $p^{n+k} + \left(\frac{n+k}{k}\right)^{n+k} (-1)^{n+1} \left(\frac{\alpha k}{n}\right)^n$ , а коэффициенты  $\alpha_i^j$  при  $i < n - 1, c_i^j$ , – некоторые константы.

Здесь через  $V^{-1}$  обозначено обратное преобразование Лапласа Бореля.

Следствием Теоремы 1 является следующий результат.

**Теорема 2.** Асимптотики любого из решений уравнения (1) в пространстве функций экспоненциального роста представимы в виде асимптотических слагаемых, каждое из которых соответствует  $i$ -му корню основного символа кратности  $v_i$ .

$$u_i \approx \exp\left(P_i\left(r^{\frac{1}{l_i}}\right)\right) \sum_{j=1}^{m_i} r^{\sigma_j^i} \ln^j r \sum_{l=0}^{\infty} a_l^i r^l$$

Здесь  $p_i$  – корни основного символа дифференциального оператора, стоящего в левой части уравнения (1) и  $v_i$  – их кратности.  $l_i \leq v_i, P_i(x) = M_i x^{k_i} + \dots + M_1 x$  – полином  $k_i \leq l_i$ , через  $m_i, \sigma_j^i, a_l^i$  обозначены соответствующие константы,  $\sum_{l=0}^{\infty} a_l^i r^l$  – степенные ряды, вообще говоря асимптотические.

# УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Зайцева Н.В.<sup>1</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра общей математики,  
e-mail: zaitseva@cs.msu.ru

В полупространстве  $\{(x, t) : x \in R^n, t > 0\}$  рассматриваются гиперболические дифференциально-разностные уравнения, содержащие суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига:

$$u_{tt}(x, t) = a^2 \sum_{j=1}^n u_{x_j x_j}(x, t) + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j - h_j, x_{j+1}, \dots, x_n, t),$$

$$u_{tt}(x, t) = a^2 \sum_{j=1}^n u_{x_j x_j}(x, t) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n b_{kj} u_{x_j x_j}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k - h_k, x_{k+1}, \dots, x_n, t),$$

и уравнения, содержащие суммы дифференциальных операторов и операторов сдвига, действующих по пространственным переменным

$$u_{tt}(x, t) = a^2 \sum_{j=1}^n u_{x_j x_j}(x, t) - \sum_{j=1}^n b_j u(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j - h_j, x_{j+1}, \dots, x_n, t),$$

$$u_{tt}(x, t) = a^2 \sum_{j=1}^n u_{x_j x_j}(x, t) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} b_{kj} u(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j - h_{jk}, x_{j+1}, \dots, x_n, t).$$

Все коэффициенты и сдвиги в уравнениях – заданные действительные числа.

В работах [1, 2] с помощью операционной схемы Гельфанда-Шилова построены трехпараметрические семейства решений всех указанных уравнений. Доказаны теоремы о том, что полученные решения являются классическими, если выполняется условие положительности вещественной части символа дифференциально-разностных операторов в правых частях уравнений.

Для каждого из рассмотренных уравнений получены достаточные условия на коэффициенты и сдвиги, гарантирующие существование их классических решений.

## Литература

1. Зайцева Н.В. Классические решения гиперболических дифференциально-разностных уравнений в полупространстве // Дифференц. уравнения. (2022) **58**, №5, с.628–637.
2. Зайцева Н.В. Классические решения одного многомерного гиперболического дифференциально-разностного уравнения с разнонаправленными сдвигами в потенциалах // Матем. заметки. (2022) **112**, вып. 6, с.810–819.

# ОБ ОДНОМ ВАРИАЦИОННОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ВАЛЛИСА

Нефедов В.В.<sup>1</sup> Тихомиров В.В.<sup>2</sup>

- 1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АНИ, e-mail:vv\_nefedov@mail.ru  
2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ОМ, e-mail:zedum@cs.msu.ru

Исследованы две модели, предложенные Валлисом для описания нелинейных взаимодействий атмосферы, океана и пассатных ветров в экваториальной области Тихого океана. Основная идея вариационного метода [2] состоит в определении максимума скорости изменения евклидовой метрики в фазовом пространстве решений, предполагая, что искомое возмущенное решение не покидает области  $\varepsilon$  окрестности точки бифуркации. Первая модель, которая не учитывает влияния пассатных ветров, предложенная Валлисом, представляет собой систему трёх нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$x_t = \mu y - ax, y_t = xz - y, z_t = 1 - xy - z,$$

Система имеет следующие свойства: 1) Однородность (автономность), 2) Диссипативность (все траектории ограничены некоторым предельным множеством). Найдены необходимые (и достаточные) условия устойчивости по Ляпунову нулевого положения равновесия системы.

**Теорема 1.** Возмущенное решение системы в окрестности положения равновесия  $(0,0,1)$  необходимо (асимптотически) устойчиво по Ляпунову при условиях  $a > 0$ ,  $(\mu + 1)^2 < 4a$ . Эти условия будут достаточными для устойчивости по Ляпунову возмущенных решений в области фазовых переменных, удовлетворяющих в окрестности нулевого положения равновесия неравенствам  $\frac{\mu+2}{2} \cdot x < y < \frac{2a}{\mu+2} \cdot x$ .

Система имеет еще две точки бифуркации

$$O_2 = \left( \sqrt{\frac{\mu-a}{a}}, \sqrt{a(\mu-a)}, \frac{a}{\mu} \right); O_3 = \left( -\sqrt{\frac{\mu-a}{a}}, -\sqrt{a(\mu-a)}, \frac{a}{\mu} \right).$$

**Теорема 2.** Возмущенное решение системы в окрестности точки  $O_2$  необходимо (асимптотически) устойчиво по Ляпунову при условиях

$$\sqrt{a(\mu-a)} \geq 0, \mu > a.$$

При дополнительном условии  $(\mu + \frac{a}{\mu})^2 < 2a + \frac{1}{\mu} \sqrt{(\mu-a)a}$  эти условия будут достаточными для устойчивости по Ляпунову возмущенных решений в окрестности точки бифуркации  $O_2$  в области фазовых переменных, удовлетворяющих соотношениям

$$\frac{1}{2} \left( \mu + \frac{a}{\mu} \right)^2 x \leq y \leq \left[ 2a + \frac{1}{\mu} \sqrt{(\mu-a) \cdot a} \right] \cdot x.$$

Аналогично исследуется другая модель, предложена Валлисом для описания нелинейного процесса изменений в атмосфере, океана и пассатных ветров в экваториальной области Тихого океана. Предложенная вариационная методика позволяет эффективно решать указанные вопросы устойчивости по Ляпунову для широкого класса нелинейных динамических систем.

## Литература.

1. Vallis G.K. Conceptual models of El Nino // J. Geophys. Res. (1988) **93**.
2. Смольяков Э.Р. Эффективный метод устойчивости существенно нелинейных динамических систем // Кибернетика и системный анализ (2019) **55**, № 4.

# ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ СПИНОВЫХ ВОЛН

Аристов А.И.<sup>1</sup>, Холомеева А.А.<sup>2</sup>

- 1) МГУ, факультет ВМК, кафедра ОМ, ФИЦ ИУ РАН, e-mail: ai\_aristov@mail.ru  
2) МГУ, факультет ВМК, кафедра ФаАП, ФИЦ ИУ РАН, e-mail: kholomeeva@cs.msu.ru

В работе исследуется нелинейное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta u + D[u] = 0, \quad (1)$$

которое описывает нестационарный процесс в магнитной среде с пространственной дисперсией. В работе были найдены решения уравнения (1) различными методами. Были найдены решения типа бегущей волны, решения специального вида, решения – обобщенные многочлены пространственной переменной  $x$ , обобщенные многочлены  $t^{-1}$ . Использовался метод разделения переменных. Были исследованы групповые свойства уравнения (1) и показана неединственность классического решения задачи Коши для этого уравнения.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00449.

## Литература

1. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М., 2007.
2. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики // М.: Физматлит, 2005.
3. Аристов А.И. О точных решениях одного неклассического уравнения в частных производных // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2015. Т. 55. № 11. С. 1870–1875.
4. Аристов А.И. Точные решения неклассического уравнения с нелинейностью под знаком лапласиана // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1360–1370.

# ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ С ПОМОЩЬЮ ТЕСТА ПЕНЛЕВЕ

Аристов А.И.<sup>1</sup>, Моисеев Е.И.<sup>2</sup>, Холومهева А.А.<sup>3</sup>

1) МГУ, факультет ВМК, кафедра ОМ, ФИЦ ИУ РАН, e-mail: ai\_aristov@mail.ru

2) МГУ, факультет ВМК, кафедра ФАиП, ФИЦ ИУ РАН,, e-mail: emoise@mail.ru

3) МГУ, факультет ВМК, кафедра ФАиП, ФИЦ ИУ РАН, e-mail: kholomeeva@cs.msu.ru

В работе исследуется нелинейное уравнение соболевского типа, которое описывает нестационарный процесс в полупроводниковой среде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\varphi - \varphi) + B\varphi + A\varphi^2 + (\lambda, \nabla)\varphi^2 = 0, \quad (1)$$

где  $\varphi$  – это плотность распределения связанного заряда в полупроводнике. Мы ищем решение уравнения (1) в виде бегущей волны. После соответствующих замен и переобозначений получено уравнение

$$av''' - v' + 2bvv' + Av^2 + Bv = 0. \quad (2)$$

К уравнению (2) был применён тест Пенлеве, который является эффективным инструментом построения общих решений обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. При этом строятся решения в виде ряда Лорана или доказывается, что при данном соотношении параметров решение не существует.

В данной работе было показано, что уравнение (2) удовлетворяет тесту Пенлеве при выполнении условия

$$45 Ab^2 + 110A^3a + 225Bb^3 = 0, \quad (3)$$

при этом решение уравнения (2) представимо в виде ряда Лорана.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00449.

## Литература

1. Корпусов М.О. Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях //М.: URSS. 2011.
2. Robert Conte, Micheline Musette, The Painleve Handbook // Springer Dordrecht, 2008.
3. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики //М.: Физматлит, 2005.

**ВЛИЯНИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА КИНЕТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ В ПЛАЗМЕ В ЗАДАЧЕ РЕКОНСТРУКЦИИ РАВНОВЕСИЯ**

Сучков Е.П.<sup>1</sup>

*1) МГУ имени М.В.Ломоносова, ВМК, кафедра АНИ, e-mail: suchkov.egor@gmail.com.*

Реконструкция равновесия плазмы имеет важное значение в термоядерных исследованиях, т.к. восстановленные данные используются в качестве входных для большинства кодов моделирования и систем управления плазмой. Точность реконструкции играет решающую роль в фундаментальном понимании процессов, происходящих в современных устройствах и термоядерных реакторах. Результаты проведенных исследований [1-3] демонстрируют, что традиционные методы восстановления равновесия могут использоваться только при условии точных вычислений интервалов доверия восстановленных функций. Одним и тем же диагностическим измерениям в пределах небольшой погрешности могут соответствовать существенно различные профили плотности тока и коэффициента запаса устойчивости. Математическое обоснование такого поведения состоит в том, что плотность тороидального тока складывается из суммы давления плазмы и функции полоидального тока, при этом одна и та же сумма может быть получена при разных значениях слагаемых.

Методики точного вычисления интервалов доверия восстановленных функций, не использующих вероятностный подход, остаются слабо развитыми на сегодняшний день. В традиционных методах аппроксимации интервал доверия является, прежде всего, показателем качества аппроксимирующего алгоритма, а не четким определением различных равновесных профилей и полоидального потока, отвечающих экспериментальным данным.

Доклад посвящён обсуждению алгоритма строгого расчета интервалов доверия для функций задачи реконструкции равновесия на основе метода эpsilon-сетей. Представлены результаты применения предложенного алгоритма для анализа эксперимента для токамаков JET и ASDEX Upgrade.

**Литература**

1. Coelho R., et. al. Evaluation of epsilon-net calculated equilibrium reconstruction error bars in the European integrated modeling platform //Fusion Science and Technology – 2016. – V.6 №3
2. Joffrin S., et. al. Overview of the JET preparation for deuterium-tritium operation with the ITER like-wall. //Nuclear Fusion – 2019. – V.59 №11
3. F.S. Zaitsev. Mathematical modeling of toroidal plasma evolution. English edition. - MAKS Press, 2014, 688 p.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ УЕДИНЕННЫХ МИКРОМАГНИТНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Шейна Е.А.<sup>1</sup>

*1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, e-mail: sheina\_elena@mail.ru*

Работа посвящена изучению микромагнитных конфигураций, реализующихся в сферических ферромагнитных наночастицах. Они эффективно применяются во многих отраслях, например, в биомедицине для диагностики и терапии тяжелых заболеваний, а также при разработке перспективных запоминающих устройств с высокой плотностью записи информации (более терабайта на квадратный дюйм).

В работе численно изучается динамика намагниченности в ферромагнитной частице, которая описывается уравнением Ландау-Лифшица-Гильберта; его установившееся решение минимизирует функционал энергии Гиббса среди векторных функций постоянной длины.

Для областей различного размера получен ряд конфигураций остаточной намагниченности с магнитными доменами, представляющими собой области однородной намагниченности, разделенные уединенной доменной стенкой. Для анизотропного материала найдены стационарные распределения намагниченности без аксиальной симметрии.

Для изотропного случая целью численного моделирования был поиск состояний с зависимостью от угловой переменной, которые предположительно обладают большей устойчивостью. Однако все численные расчеты с различными начальными несимметричными и в том числе случайными полностью размагниченными состояниями привели к стационарным решениям с аксиальной симметрией. Этот факт согласуется с доказанным в работе утверждением, что уменьшить минимум энергии достигаемый на множестве аксиально-симметричных векторных функций постоянной длины невозможно за счет отказа от требования симметрии.

# АНАЛИЗ ОКУЛОГРАФИЧЕСКИХ ДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОСЕТЕЙ

Шишкин А.Г.<sup>1</sup>, Шаршавин А.Д.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, каф. автоматизации научных исследований, e-mail: shishkin@cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, каф. автоматизации научных исследований, e-mail: ashas.12@yandex.ru

Окулография (айтрекинг, отслеживание взгляда) — это процесс измерения того, в какой точке в данный момент времени сфокусированы глаза пользователя или иначе динамика определения координат взора. Для измерения положения и движений глаз человека предназначен айтрекер — устройство для бесконтактной регистрации окуломоторной активности человека. Основу айтрекера составляет высокоточная скоростная камера, отслеживающая отражение источника света вместе с видимыми элементами глаза, такими как зрачок.

Необходимо отметить, что визуальная информация важна для многих медицинских диагностических исследований. Зрительные процессы в значительной степени бессознательны и недоступны для интроспекции. Отслеживание взгляда объективно измеряет движения глаз, чтобы увидеть, на что смотрит человек, как долго и в каком порядке. Регистрация и анализ глазодвигательной реакции и динамики размера зрачка позволяют исследовать различные психические и психофизиологические функции объекта обследования, в том числе и неосознанные.

Целью данной работы является построение нейросетевой модели для классификации уровней когнитивной нагрузки человека по его тепловым картам, построенным на основе данных айтрекера при решении зрительных поисковых задач различной сложности и продолжительности.

В рассматриваемом датасете COLET [1] было около 10 тысяч тепловых карт, полученных после прохождения тестов 47 человек и размеченных на 2 класса: высокая и низкая когнитивная нагрузка. Каждый из испытуемых решал несколько задач на компьютере с надетым считывателем глазного яблока, который определял в какую точку был направлен взгляд человека. В наборе данных содержатся координаты и длительность фиксации взгляда. Затем значения вокруг точек фиксации моделировались с помощью нормального распределения. После этого формировалась тепловая карта размером 1080\*1920\*3.

Так как данные представляют собой изображения, то для их обработки была использована глубокая сверточная нейронная сеть. Для создания оптимальной архитектуры модели были проведены различные эксперименты, в ходе которых изменялись типы инициализации весов, добавлялись слои дропаута, батч-нормализация и др. Обучение происходило с помощью кросс-валидации. После проведенных экспериментов была получена оптимальная архитектура модели с 4 сверточными слоями, эффективность которой оцениваемая с помощью F1-меры, составила 0.88.

## Литература

1. Ktistakis, E., Skaramagkas, V., Manousos, D., Tachos, N. S., Tripoliti, E., Fotiadis, D. I., & Tsiknakis, M. (2022). Colet: A dataset for cognitive workload estimation based on eye-tracking. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 106989

# ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОФИЛЯ ТОКА И КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕНОСА В ТОКАМАКЕ

Андреев В.Ф.<sup>1</sup>, Зотов И.В.<sup>2</sup>, Попов А.М.<sup>3</sup>

1) НИЦ Курчатовский институт, e-mail: [vfandreev@gmail.com](mailto:vfandreev@gmail.com)

2) Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова, факультет Вычислительной математики и кибернетики, кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: [iv-zotov@cs.msu.ru](mailto:iv-zotov@cs.msu.ru)

3) Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова, факультет Вычислительной математики и кибернетики, кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: [professorpopov@gmail.com](mailto:professorpopov@gmail.com)

Идея применения методологии обратных задач к решению задач физики плазмы принадлежит А.Н.Тихонову. Она последовательно развивалась в работах его учеников Днестровского Ю.Н. и Костомарова Д.П. [1]. В данной работе представлены две обратные задачи, относящиеся к физике плазмы в токамаке. Решение этих задач является актуальной проблемой, так как в настоящее время осуществляется физический пуск новой установки Т-15МД.

Первая обратная задача посвящена определению профиля тока в плазме в установке токамак при дополнительной информации, полученной по разным диагностикам. Известно, что определить однозначно профиль плотности тока только по результатам измерений магнитной диагностики невозможно. Однако, если привлечь дополнительную информацию, такую как распределение электронной температуры, профиля давления или другие, то при такой дополнительной информации удастся однозначно восстановить профиль плотности тока из решения обратной задачи.

Вторая обратная задача посвящена восстановлению коэффициента диффузии и скорости пинчевания частиц в переходном процессе после включения центрального электронно-циклотронного нагрева (ЭЦР). Многочисленные эксперименты показали, что при этом происходит вынос частиц из области нагрева на периферию, так называемый эффект «density pump-out». Один из главных парадоксов данного явления заключается в том, что с увеличением средней плотности вынос частиц из зоны нагрева увеличивается. Существует несколько попыток теоретического объяснения данного явления, однако они пока не увенчались успехом.

В работе записывается уравнение диффузии частиц для переходного процесса после включения ЭЦР-нагрева, в котором неизвестными являются коэффициент диффузии и скорость пинчевания частиц. Формулируется функционал невязки – разность между измеренными и расчетными значениями плотности. Неизвестные коэффициенты переноса разлагаются по заданному базису. Минимизация данного функционала позволяет найти коэффициент диффузии и скорость пинчевания частиц.

Проведено сравнение коэффициентов переноса для переходного процесса при разной мощности нагрева, средней плотности и др. Показано, что основное изменение происходит в скорости пинчевания частиц. Поэтому эффект «density pump-out», возможно, связан с изменением именно пинчевой составляющей переноса частиц.

Работа поддержана грантом РФФИ № 20-07-00391.

## Литература

1. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Физматлит, 1993. 336 с.

# ВЕРИФИКАЦИЯ КОДА САВАРЕТ-МСГ ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ НА РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Афанасьев Н.А.<sup>1</sup>, Шагиров Н.Э.<sup>1</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов,  
e-mail: vtnaf@cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов,  
e-mail: nikkey.shagirov@yandex.ru

В настоящее время рассматриваются две технологии, нацеленные на промышленное получение водорода. Первая технология основывается на использовании анионных электролизёров, вторая – на технологии высокотемпературного риформинга метана. Такая технология в настоящее время широко используется, в частности, в нефтеперерабатывающей промышленности. При этом высокая температура достигается путем сжигания части метана, что увеличивает «углеродный след» получения водорода. Снижение «углеродного следа» достигается путем создания технологии, основанной на использовании для риформинга метана высокотемпературного тепла реактора ВТГР (высокотемпературные газоохлаждаемые реакторы). Для этого создаётся атомный энерготехнологический комплекс, включающий ВТГР и химико-технологическую часть, обеспечивающую наработку водорода с существенно меньшими затратами, чем на электролизных установках.

Водород в определенных условиях является взрывоопасным веществом, поэтому важнейшей задачей при создании таких производств является обеспечение безопасности, а именно разработка средств и методов предотвращения крупномасштабных аварий. Так как экспериментальные исследования весьма дорогие, то важная роль отводится расчётным. Для этого в силу большого многообразия процессов, протекающих в ходе аварий, адаптируются существующие и при необходимости разрабатываются новые теоретические модели, создаются программные коды для их решения.

Авторами доклада на основе хорошо зарекомендовавшего себя в задачах индустриальной математики метода КАБАРЕ [1] разрабатывается программный код САВАРЕТ-МСГ (multicomponent gas) для моделирования процессов протекания крупномасштабных аварий. В данной работе описываются основные идея применения балансно-характеристических схем к таким задачам, обсуждаются некоторые особенности разработки эффективного инженерного кода, такие как робастные расчеты сверхзвуковых течений и течений с сильными ударными волнами, а также вопросы параллелизации разрабатываемого кода. Проводятся верификация представленных моделей и численных методов на одномерных, двумерных и трехмерных задачах о течении многокомпонентного идеального газа. Верификационные задачи включают в себя: задачи о движении контактных разрывов, задачи о распаде плоского разрыва, задачи о распространении ударных волн в цилиндрической и сферической геометриях, задачи об устойчивости двумерных изэнтропических вихрей, задачи о развитии неустойчивости Мешкова-Рихтмайера.

## Литература

1. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // Journal of Computational Physics. 2009. Vol. 228, № 19. P. 7426 - 7451.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕГУЛЯЦИИ УРОВНЯ ГЛЮКОЗЫ И ИНСУЛИНА В РАМКАХ САМОСОГЛАСОВАННОЙ МОДЕЛИ СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЫ

Мухин С.И.<sup>1</sup>, Мысова К.М.<sup>2</sup>, Покладюк А.Ю.<sup>3</sup>, Хруленко А.Б.<sup>4</sup>

- 1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Вычислительных Методов, e-mail: vmttus@cs.msu.ru
- 2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Вычислительных Методов, e-mail: mysova.ksusha@mail.ru
- 3) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Вычислительных Методов, e-mail: apokladyuk02@mail.ru
- 4) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Вычислительных Методов, e-mail: khrulenko@cs.msu.ru

Глюкоза является основным источником энергии в живом организме и доставляется кровью ко всем органам и тканям. Для нормальной жизнедеятельности человека концентрацию глюкозы в крови необходимо поддерживать в определенных пределах. В процессе регуляции уровня глюкозы важнейшую роль играет инсулин - гормон поджелудочной железы, проводящий глюкозу в клетки мышечной и жировой ткани, а также в клетки печени. Печень осуществляет поддержание нормогликемии за счёт депонирования избыточной глюкозы в гепатоциты в виде гликогена, с возможностью последующего выброса в кровь при физиологической необходимости. Моделирование процессов динамики веществ в организме позволяет исследовать физиологические процессы сердечно-сосудистой системы, а также делать выводы о влиянии патологий и функций органов на уровни концентраций веществ.

Алгоритм численного решения этой задачи для произвольной замкнутой системы эластичных трубок реализован на основе программного комплекса CVSS [1, 2]. Распространение глюкозы и инсулина осуществляется конвекционным и диффузионным образом. В данной работе рассматривается моделирование переноса глюкозы и инсулина на графе большого круга кровообращения с самосогласованной моделью сердца и детализированной моделью печени.

Проведены численные эксперименты функционирования системы при поступлении пероральной глюкозной нагрузки, которая соответствует тесту толерантности к глюкозе [3]. Данное лабораторное исследование используется для диагностики нарушений усвоения глюкозы, в том числе сахарного диабета и предиабета. Полученные при математическом моделировании результаты качественно согласуются с клиническими данными, имеющимися в современной медицинской литературе.

## Литература

1. Борзов А.Г., Древаль А.В., Мухин С.И., Моделирование динамики глюкозы крови с учетом топологии большого круга кровообращения // Математическое моделирование – 2015. – Т. 27 – №2. – с. 3–24.
2. Абакумов М.В., Ашметков И.В., Есикова Н.Б. [и др.]. Методика математического моделирования сердечно-сосудистой системы. // Математическое моделирование – 2000. – Т. 12 – №2. – с.106–117.
3. Древаль А.В., Лечение сахарного диабета и сопутствующих заболеваний // М.: Эксмо. – 2010.

# ВЗАИМНОЕ ВЛИЯНИЕ КОМПОНЕНТ ВОЛНОВОГО ВЕКТОРА НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ АДАПТИВНЫХ ИСКУССТВЕННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Егоренков В.А.<sup>1</sup>, Логинова М.М.<sup>1</sup>, Трофимов В.А.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов  
e-mail: egorenkov-v-a@cs.msu.ru, mloginova@cs.msu.ru

2) Южно-Китайский университет технологий, SCUT, Guangzhou, China,  
e-mail: trofimov@scut.edu.cn

Проблема введения искусственных границ и задания соответствующих краевых условий для задач, поставленных в неограниченной области, широко исследуется в литературе на протяжении последних десятилетий. В докладе предлагается и обсуждается новый метод построения адаптивных искусственных краевых условий (ИКУ) для двумерного нестационарного нелинейного уравнения Шредингера. Это уравнение описывает распространение оптического импульса в полупроводниковом слое в условиях генерации полупроводниковой плазмы. При численном решении рассматриваемой задачи необходимо либо использовать для расчетов существенно расширенную пространственную область, либо ставить искусственную границы и задавать на них ИКУ. Из-за нелинейности процесса, численное решение задачи очень чувствительно к появлению «ложной» волны: отраженной от искусственной границы волны. В этой связи эффективность (прозрачность) ИКУ является критически важным вопросом.

Для повышения эффективности ИКУ в докладе предложено использовать одновременно два подхода. Во-первых, так как локальные характеристики оптического излучения изменяются вследствие нелинейности среды, дифракции и дисперсионного расплывания, при построении ИКУ нужно использовать адаптивные локальные волновые числа (ЛВЧ), зависящие как от пространственных координат, так и от временной координаты. Для определения ЛВЧ в работе предложен метод их аппроксимации в виде интегрального соотношения на основе инвариантов уравнения Шредингера и использования решения задачи вблизи искусственной границы [1]; найдены параметры численного интегрирования, которые обеспечивают высокую точность расчетов. Во-вторых, эффективность ИКУ увеличивается при учете ЛВЧ по всем координатам при записи ИКУ по каждой из координат. Данный подход является новым и не описан в литературе.

На основе компьютерного моделирования мы продемонстрировали преимущества адаптивных ИКУ при учете обоих волновых чисел. Для подтверждения адекватности и точности предложенного подхода к построению ИКУ проводилось сравнение с аналитическим решением и расчетами, проведенными в существенно расширенной области. Предложенный метод может иметь широкое применение при моделировании процессов, описываемых уравнением Шредингера.

## Литература

1. Trofimov V., Loginova M., Egorenkov V. Efficiency of using adaptive artificial boundary conditions at computer simulation of contrast spatio-temporal laser-induced structures in a semiconductor //Computational and Mathematical Methods. – 2021. – Т. 3. – №. 6. – С. e1165.

# ВЛИЯНИЕ ИСКУССТВЕННОЙ ДИССИПАЦИИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ МОДЕЛИ НВ-2 НА ОСНОВЕ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

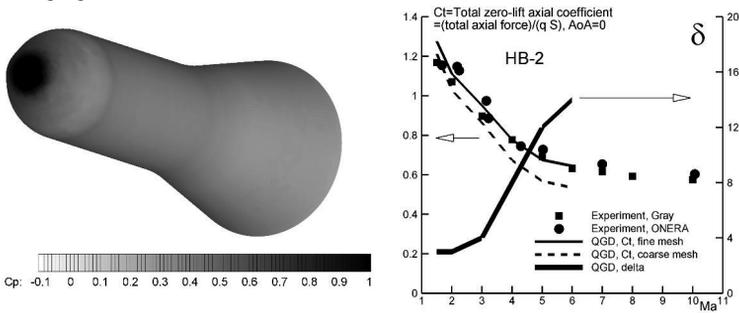
Широков И.А.<sup>1</sup>

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов  
e-mail: ivanshirokov@inbox.ru

Алгоритм моделирования течений вязкого газа, основанный на системе регуляризованных (квазигазодинамических) уравнений и реализованный на тетраэдральной пространственной сетке, является достаточно универсальным средством исследования особенностей обтекания трехмерных моделей. Для осесимметричных моделей разработан алгоритм построения поверхностной сетки, позволяющий создавать достаточно аккуратные пространственные нерегулярные тетраэдральные сетки вокруг модели с помощью сеточного генератора TetGen.

Многочисленные экспериментальные и численные результаты, полученные при исследовании обтекания стандартной баллистической модели НВ-2 [1], могут быть использованы для уточнения деталей используемого численного алгоритма. В частности, представляет интерес выбор величины дополнительной диссипации в коэффициенте объемной вязкости (такой способ введения дополнительной диссипации в квазигазодинамическом алгоритме показал свою перспективность при моделировании сверхзвукового обтекания различных моделей [2]).

В настоящей работе на основе численных экспериментов получены оптимальные значения коэффициента дополнительной диссипации  $\delta$ , позволяющие проводить моделирование модели НВ-2 таким образом, чтобы интегральное значение коэффициента полного сопротивления при нулевом угле атаки соответствовало бы экспериментальным значениям в диапазоне числа Маха от 1.5 до 6. Эти значения коэффициента  $\delta$  могут быть использованы как ориентировочные данные при моделировании сверхзвукового обтекания различных осесимметричных моделей при различных числах Маха.



## Литература

1. Gray J. D. Summary Report on Aerodynamic Characteristics of Standard Models HB-1 and HB-2 // AEDC-TDR-64-137 (1964).
2. Елизарова Т. Г., Широков И. А. Коэффициенты искусственной диссипации в регуляризованных уравнениях сверхзвуковой аэродинамики // ДАН (2018) 483, №3, с. 260–264.

# ВОЗДЕЙСТВИЕ СКОРОСТИ ПОТОКА НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФИЛЬТРУЮЩИХ ОТВЕРСТИЙ

Трощев Ю.В.<sup>1</sup>

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра Вычислительных методов, лаборатория Математического моделирования в физике, e-mail: yuvt@cs.msu.ru

В работе [1] была построена математическая модель течения жидкости через фильтр с учетом образования отложений на стенках фильтра. В работах [2,3] частично исследован вопрос, может ли увеличение скорости жидкости уменьшать эффективность использования фильтрующих отверстий из-за ускорения роста отложений, т.е. может ли увеличение скорости течения приводить к тому, что для фильтрующего отверстия будет уменьшаться вероятность поймать частицу прежде, чем оно зарастет отложениями.

В модели [1] слой почти неподвижной жидкости описан в плоской геометрии. Это достаточно точно, если слой тонкий. Если слой не тонкий, то учет цилиндрической геометрии все равно не уточняет математическую модель. Излом на зависимости концентрации от радиуса  $c(r)$  увеличивается, а при расстоянии от центра отверстия до слоя  $r_{eq}=0$  получается разрывное решение.

Два варианта вероятности прохождения частицы через отверстие из [3] соответствуют случаям, когда в данный момент времени через отверстие могут проплывать несколько частиц или не более одной частицы.

В работе [3] были получены предварительные результаты для локального поиска искомых значений параметров. В данном докладе на основе этих результатов доказано, что выполнено неравенство  $t_2/t_1 \geq n/(n+1) \geq 0.5$ , из чего следует, что отношение  $t_2/t_1$  не может быть устремлено к нулю, т.е. найти искомые значения параметров с помощью локального исследования невозможно. Это серьезный аргумент в пользу того, что таких значений параметров не существует, и что производная от интегральной вероятности по скорости течения не может быть отрицательной.

Дополнительно было проведено численное исследование в окрестности точки  $K, D, c_0, p, R_0=1$  и в окрестности физически осмысленных значений параметров  $K=1.66 \cdot 10^{-4}, D=10^{-9}$ . Значения параметров менялись на несколько порядков. Отрицательных значений производной не было обнаружено.

Таким образом, с достаточной степенью достоверности можно утверждать, что в рассмотренной математической модели производная интегральной вероятности не может быть отрицательной. Хотя увеличение скорости течения жидкости и увеличивает скорость роста отложений, но оно всегда увеличивает эффективность использования фильтрующих отверстий. Речь идет о таких скоростях, когда число Рейнольдса не слишком большое, и течение происходит без турбулентностей и завихрений.

## Литература

1. Troshchiev Yu.V. Mathematical Modeling of Sediments in the Filter and Improvement of the Filter Construction // Cornell University, USA, arxiv:2103.09492v2, 2021.
2. Трощев Ю.В. Исследование нелинейных зависимостей в фильтрах с учетом образования отложений // Ломоносовские чтения-2021: научная конференция, факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. Тезисы докладов. с.147-148, 2021.
3. Troshchiev Yu.V. Preliminary analytical investigation of the flow velocity impact to the usage of the filtering apertures // The scientific heritage. 2021. N 70(1). p. 23-28. DOI:10.24412/9215-0365-2021-70-1-23-28

# СВЯЗЬ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С УРАВНЕНИЯМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Петрова Л.И.

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК,  
кафедра вычислительных методов, e-mail: ptr@cs.msu.ru*

В теории дифференциальных уравнений Гамильтоновы системы являются соотношениями, определяющими условия интегрируемости дифференциальных уравнений.

Исследование интегрируемости уравнений математической физики, описывающих какие-либо процессы, показало, что уравнения математической физики без дополнительных условий оказываются неинтегрируемыми. Их решения на исходном координатном пространстве не являются функциями. Производные решений не образуют дифференциал. Однако, при наличии каких-либо степеней свободы могут реализоваться интегрируемые структуры, на которых уравнения становятся интегрируемыми. На интегрируемых структурах решения являются дискретными функциями.

Реализациям интегрируемых структур соответствует переход от касательного пространства исходных уравнений к кокасательному пространству с интегрируемыми соотношениями, примером которых являются Гамильтоновы системы.

В классической механике Гамильтонова система реализуется из уравнения Эйлера-Лагранжа как условие интегрируемости уравнения Эйлера-Лагранжа. Реализация Гамильтоновой системы происходит дискретно. При этом переход от касательного многообразия с уравнением Эйлера-Лагранжа к сечениям кокасательного многообразия с Гамильтоновой системой осуществляется вырожденным преобразованием (преобразованием не сохраняющим дифференциал), примером которого является преобразование Лежандра.

В теории поля примером канонических соотношений является Гамильтонова система, которая получается при изучении интегрируемости дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, не зависящего явно от искомой функции и разрешенного относительно некоторой переменной, например времени.

Получается, что Гамильтоновы системы реализуются из уравнений математической физики как условие их интегрируемости.

Такие результаты получены с помощью кососимметричных дифференциальных форм.

# ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЙ ДИССОЦИИИ

Шобухов А.В.

*МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов,  
лаборатория математического моделирования в физике  
e-mail: shobukhov@cs.msu.ru*

В настоящей работе рассматривается модель электролитической диссоциации, учитывающая диффузию образующихся ионов в электролите. Диффузионный процесс, обусловленный градиентами концентраций ионов в растворителе, протекает гораздо медленнее процессов диссоциации молекул и ассоциации ионов.

При отсутствии диффузии теория электролитической диссоциации [1] для симметричного бинарного электролита приводит к следующей системе двух о.д.у. с одинаковыми частями:

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= k_D \cdot (C_0 - C_1 - C_2) - k_A \cdot C_1 \cdot C_2 \equiv F(C_1, C_2); \\ \dot{C}_2 &= k_D \cdot (C_0 - C_1 - C_2) - k_A \cdot C_1 \cdot C_2 \equiv F(C_1, C_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $C_1(t)$  и  $C_2(t)$  – концентрации положительных и отрицательных ионов, возникающих при диссоциации молекул электролита;  $k_D$  – константа скорости диссоциации. Исходная концентрация этих молекул равна  $C_0$ ; молекулы также образуются при ассоциации ионов;  $k_A$  – константа скорости ассоциации. Траектории (1), начинающиеся при  $t=0$  в области  $K = \{0 \leq C_1, C_2 \leq 1; C_1 + C_2 \leq C_0\}$ , не покидают её при  $t>0$ . Стационарные решения (1) образуют на плоскости  $(C_1, C_2)$  кривую устойчивых состояний, задаваемую уравнением  $C_2 = k_D \cdot (C_0 - C_1) / (k_R C_1 + k_D)$ . Но при естественном начальном условии  $C_1(0)=C_2(0)=0$  траектория (1) при  $t \rightarrow \infty$  стремится к единственной в  $K$  особой точке:

$$C_1^* = C_2^* = C^* \equiv (k_D/k_R) \cdot (\sqrt{1 + k_R/k_D} - 1) \quad (2)$$

которая удовлетворяет условию электронейтральности.

При добавлении диффузионных членов и краевых условий модель принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'' \\ C_2'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(C_1, C_2) \\ F(C_1, C_2) \end{pmatrix}; \quad C_1'(t, 0) = C_1'(t, L) = 0; \\ C_2'(t, 0) = C_2'(t, L) = 0; \quad (3)$$

где  $L$  – размер изучаемой области электролитической диссоциации.

При этом матрица  $(D_{jk})$  должна удовлетворять критериям диффузионности:

$$D_{jk} \geq 0, \quad j, k = 1, 2; \quad D_{11} > 0; \quad D_{11}D_{22} - D_{21}D_{12} > 0; \quad (4)$$

которые обеспечивают положительность её собственных чисел. В настоящей работе показано, что если наряду с (4) выполняется требование:

$$D_{21} + D_{12} > D_{11} + D_{22}, \quad (5)$$

то в решении (3) будет возникать неустойчивость гармоник  $\cos \pi m x$  при  $m > m^*$ , где:

$$m^* = \frac{1}{\pi} \sqrt{(q_D + q_R \cdot C^*) \cdot \frac{d_{21} + d_{12} - d_{11} - d_{22}}{d_{11} \cdot d_{22} - d_{21} \cdot d_{12}}}; \quad q_D = k_D L^2 / D; \quad d_{jk} = D_{jk} / D. \quad (6)$$

Здесь  $D$  – характерная величина коэффициентов диффузии ионов. Эта неустойчивость ведёт к стремлению решения (3)  $C_{1,2}(t, x)$  при  $t \rightarrow \infty$  к пространственно-неоднородному стационарному распределению.

## Литература

1. Дамаскин Б.Б., Петрий О.А., Цирлина Г.А. Электрохимия // М.: Химия, КолосС – 2-е изд., испр. и перераб. - 2006.

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Егоров В.М.<sup>1</sup>, Терновский В.В.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Вычислительных методов,  
e-mail: vital04frost@gmail.com

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Вычислительных методов,  
e-mail: vladimir@chatroulette.com

Рассматривается задача быстрого действия для оптимального управления колебаниями линейного и нелинейного маятника с трением. Данный процесс описывается задачей оптимального управления для нелинейного уравнения:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \mu \dot{x} + \omega(t) \sin x = 0 \\ x(0) = A \neq 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ищется такое решение  $x = x(t)$ , что

$$\begin{cases} x(T) = B \neq 0 \\ \dot{x}(T) = 0 \\ T \rightarrow \inf \\ 0 \leq a \leq \omega(t) \leq b \end{cases} \quad (2)$$

Наряду с задачей (1), (2) рассматривается задача с линеаризованным уравнением колебаний, где условия (2) те же, а задача (1) упрощена (1'):

$$\begin{cases} \ddot{x} + \mu \dot{x} + \omega(t)x = 0 \\ x(0) = A \neq 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (1')$$

В частности, были найдены некоторые аналитические решения задачи (1'), (2), где управление  $\omega(t)$  является разрывной функцией, доказана их оптимальность.

Для численного решения линейной и нелинейной задач был выбран метод покоординатного спуска. Сначала проверяется корректность работы данного метода при сравнении численного решения с аналитическим решением линейной задачи. Затем этим методом решается нелинейная задача, не допускающая аналитического решения в элементарных функциях.

Разностные методы, примененные при численном решении каждого из уравнений, отличаются от классических, так как целью работы является поиск разрывного коэффициента дифференциального уравнения. Рассматриваются различные аппроксимации как уравнения, так и граничных условий.

## Литература

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач //М.: Наука – 2-е издание – 1988 – 552с.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы //М.: Наука – 1989 – 432с.

# ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ЧАСТИЦ К ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ КЛИНА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Богомолов С.В.<sup>1</sup>, Кувшинников А.Е.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов,  
e-mail: bogomo@cs.msu.su

2) ИИМ имени М.В. Келдыша РАН, e-mail: kuvsh90@yandex.ru

Разрывный метод частиц позволяет с приемлемой точностью решать задачи с большими градиентами [1]. При этом форма частиц обуславливает их взаимодействия между собой, что прямо влияет на избираемый исследователями алгоритм. Чтобы избавиться от постоянной привязанности к форме и размерам частиц, введён другой третий инвариант, наряду с высотами частиц (решением дифференциальной задачи) и их положениями в пространстве, а именно, площадь трапеции, основаниями которой являются высоты частиц, а отрезок, соединяющий их центры, — боковой стороной [2]. Этот инвариант можно интерпретировать как след сохранения массы в пространстве между двумя частицами, массы которых тоже не меняются.

Взята известная задача, имеющая аналитическое решение: обтекание сверхзвуковым потоком клина, в результате чего образуется косой скачок уплотнения. Численные решения методом частиц и численные решениями солверов открытого программного комплекса OpenFOAM сравниваются с аналитическим решением в норме  $L_2$ . Варьируется скорость набегающего потока и угол падения потока. Построенные поверхности ошибок показывают, что точность данной модификации разрывного метода частиц не хуже широко используемых солверов.

## Литература

1. Богомолов С.В., Кувшинников А.Е. Разрывный метод частиц на газодинамических примерах // Матем. моделирование (2019), 31, №2, с.63–77.
2. Bogomolov, S.V., Kuvshinnikov A.E. A discontinuous shapeless particle method for the quasi-linear transport // J. Phys. Conf. Ser. (2021), 2099, №012009.

## ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕТА-ФУНКЦИИ К СУММИРОВАНИЮ КОНКРЕТНОГО РЯДА

Смирнов М.С.<sup>1,2</sup>, Матвеев С.А.<sup>1,2</sup>

1) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ВТМ,  
e-mail: Matsmir98@gmail.com

2) Институт Вычислительной Математики имени Г. И. Марчука РАН,  
e-mail: matsalex@cs.msu.ru

Определим функции  $f(t) = \sum e^{-tn^2}$ ,  $g(t) = \sum (-1)^{n+1} n^2 e^{-tn^2}$  (1)

при  $t > 0$ . Ясно, что в (1) выполнено  $g(t) = f'(t)$ . Функция  $g(t)$ ,  $t > 0$  возникает как плотность вероятности времени выхода для случайных блужданий [2,3]. Значение суммы  $g(t)$  теряет устойчивость при  $t \rightarrow 0$  из-за знакопеременного характера ее членов, которые быстро убывают, но сначала достаточно велики. Техническая погрешность в двойной точности суммирования первых членов становится *больше*, чем значение всей суммы ряда. Это может привести к неверному результату с отрицательным значением суммы ряда, хотя оно должно быть положительным. Группировка слагаемых, приводящая к постоянному знаку членов не приводит к устойчивому результату. Для получения устойчивого метода вычисления сумм  $f(t)$ ,  $g(t)$  воспользуемся тождеством

$$f(t) = (\theta(1/2, it/\pi) - 1)/2, \quad (2)$$

где  $\theta(z, \tau) = \sum \exp(i\pi n^2 \tau + 2i\pi n z)$  – тета-функция Якоби (см., Гл 5., [1]). Используя тождества (см. Т. V.8 в [1]), получаем знакопостоянные выражения для вычисления значений  $f(t)$

$$f(t) = \left( -1 + \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\pi^2/4t} \sum e^{-\pi^2(n^2-n)/t} \right) / 2. \quad (3)$$

Нами получены более громоздкие аналогичные выражения для  $g(t)$  после прямого дифференцирования ряда для  $f(t)$  по параметру  $t$ . В результате, получаем асимптотики

$$f(t) + 1/2 \sim A e^{-\pi^2/4t} t^{-1/2}, g(t) \sim B e^{-\pi^2/4t} t^{-5/2}, t \rightarrow 0. \quad (4)$$

При программной реализации исходных формул (1) и формул вида (3) на языках программирования C, Python и Julia потеря устойчивости результатов суммирования по формуле (1) наблюдается уже при значениях  $t < 0.05$ , а формула (3) позволяет расширить интервал значений  $t$  с корректными результатами в двойной точности вплоть до  $t=0.00362$ . Устойчивость знака результата в (3)-(4) сохраняется для всех значений  $t$  при суммировании по формуле (3), что невозможно при использовании исходных выражений (1). Расширение мантиссы позволяет расширить диапазон значений параметра  $t$  с корректными результатами. Авторы благодарны университету Сириус, за возможность частичной подготовки результатов во время образовательного модуля “Матричные методы и моделирование в науках о жизни и Земле 2022”, работа Смирнова М.С. выполнена при поддержке проекта РФФ 21-11-003252.

### Литература

1. K. Chandrasekharan. Elliptic functions, volume 281 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
2. Sabelfeld K. K. Random walk on spheres algorithm for solving transient drift-diffusion-reaction problems //Monte Carlo Meth. and Appl.. – 2017. – Т. 23. – №. 3. – С. 189-212.
3. Daniels H. E., Smithies F. The probability distribution of the extent of a random chain //Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – Cambridge University Press, 1941. – Т. 37. – №. 3. – С. 244-251.

# УЧЁТ ОШИБОК МАШИННОГО ОКРУГЛЕНИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ГРАДИЕНТНЫХ МЕТОДОВ МИНИМИЗАЦИИ

Лукьяненко Д.В.<sup>1,2</sup>, Шинкарев В.Д.<sup>1</sup>, Ягола А.Г.<sup>1</sup>

- 1) МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: [lukyanenko@physics.msu.ru](mailto:lukyanenko@physics.msu.ru)
- 2) Московский центр фундаментальной и прикладной математики

При решении прикладных обратных задач или задач оптимизации часто возникает необходимость в минимизации какого-либо целевого функционала. Для минимизации обычно применяются итерационные методы. Если задача является линейной, то одним из наиболее распространённых методов минимизации является метод сопряжённых градиентов. Если число компонент в искомом элементе, реализующем минимум функционала, равно  $N$ , то метод сопряжённых градиентов сходится к точному решению задачи ровно за  $N$  итераций. Но это утверждение верно только при условии, что все вычисления делаются точно и ошибки машинного округления отсутствуют. Однако при решении реальных прикладных задач ошибки машинного округления могут влиять на полученное приближенное решение очень сильно. Возможны два случая. В первом случае выход значения минимизируемого функционала на фон ошибок машинного округления осуществляется на какой-то итерации, значение которой меньше  $N$ . Начиная с этой итерации значение функционала перестаёт уменьшаться. Это означает, что начиная с этой итерации все последующие действия не улучшают решения и являются бессмысленными. Поэтому возникает резонный вопрос, можно ли отследить этот момент, чтобы сэкономить вычислительные ресурсы? Положительный ответ на этот вопрос полезен, но не критичен при решении реальных прикладных задач. А вот существенным для практики является второй случай. Во втором случае из-за ошибок машинного округления при определении направлений минимизации и шагов вдоль них оказывается, что после выполнения  $N$  итераций значение минимизируемого функционала ещё достаточно велико. Это означает, что найденное приближенное решение ещё может быть уточнено, если продолжить итерационный процесс. Получается, что продолжение итерационного процесса позволит найти более хорошее приближение для истинного решения. Подчеркнём, что здесь, в отличие от первого случая, классический критерий прекращения итерационного процесса (по фиксированному числу итераций, равному  $N$ ) даёт заведомо плохой результат.

При решении многих реальных прикладных обратных задач (как двумерных так и трёхмерных) авторы этой работы регулярно сталкивались с подобной проблемой. Для решения этой проблемы приходилось использовать чисто эмпирические подходы, определяя оптимальное число итераций экспериментально. Но при решении сложных реальных задач такой подход требовал больших вычислительных ресурсов. В результате возникла потребность в разработке метода автоматического определения числа итераций, при котором значение минимизируемого функционала становится сопоставимо с фоном ошибок машинного округления. Поэтому вопрос учёта ошибок машинного округления при выборе критерия прекращения итерационного процесса является актуальным и востребованным на практике [1].

## Литература

1. Lukyanenko D.V., Shinkarev V.D., Yagola A.G. accounting for round-off errors when using gradient minimization methods // Algorithms. – 2022. – V.159, n.9. – P. 324.

# МАЛОРАНГОВАЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ТЕНЗОРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОПЕРЕМЕННЫХ ПРОЕКЦИЙ И СКЕТЧИНГА

Султонов А.О.<sup>1</sup>, Матвеев С.А.<sup>1,2</sup>, Будзинский С.С.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ВТМ  
2) РАН, институт Вычислительной Математики имени Г. И. Марчука

В данной работе предлагаются новые приближённые методы для получения малоранговых аппроксимаций неотрицательных тензоров в двух популярных тензорных форматах: формате Таккера и тензорного поезда. Для тензора  $X \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times \dots \times n_d}$  с неотрицательными элементами рассмотрим следующую постановку задачи:

$$\|X - Y\|_F \rightarrow \min, \quad Y \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times \dots \times n_d}, \quad \text{rank}(Y) \leq r,$$

где  $\text{rank}(Y)$  понимается в смысле ТТ-рангов или рангов Таккера. Следует отметить, что прямые методы, такие как TTSVD и STHOSVD, не гарантируют неотрицательность элементов полученной аппроксимации.

Для тензорного поезда задача не решалась ранее, а для формата Таккера недавно был предложен метод [1], основанный на попеременных проекциях. Однако сложность одной итерации этого алгоритма составляет  $O(n^{d+1})$ , где  $n = \max\{n_1, \dots, n_d\}$ , причём доминирующая операция выполняется  $d$  раз. Поэтому на практике алгоритм оказывается очень медленным.

Предлагаемые нами методы также основаны на попеременных проекциях, однако имеют асимптотическую сложность  $O(n^d)$  за итерацию. Такое ускорение достигается за счёт использования так называемого скетчинга — семейства алгоритмов рандомизированной численной линейной алгебры. Более того, скетчинг позволяет более тонко настроить алгоритмы для достижения желаемого баланса между скоростью и точностью.

Численные эксперименты [2] с двумя синтетическими тензорами и гиперспектральным изображением подтвердили сходимость предложенных методов, а также показали, что погрешности получаемых аппроксимаций оказываются очень близки к погрешностям прямых методов TTSVD и STHOSVD.

## Литература

1. T.-X. Jiang, M. K. Ng, J. Pan, and G. Song, “Nonnegative low rank tensor approximation and its application to multi-dimensional images,” arXiv preprint arXiv:2007.14137, 2020.
2. Sultonov, S. A. Matveev, and S. Budzinskiy, “Low-rank nonnegative tensor approximation via alternating projections and sketching,” arXiv preprint arXiv:2209.02060, 2022.

# ПРЕКОДЕР ТОМЛИНСОНА-ХАРАШИМЫ

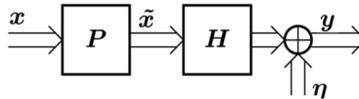
Копнина И.А.<sup>1</sup>, Уйданов П.В.<sup>2</sup>

1) Moscow Research Center Huawei Technology, (МГУ, ВМК, ВТМ), e-mail: kopnina\_i@mail.ru

2) Moscow Research Center Huawei Technology

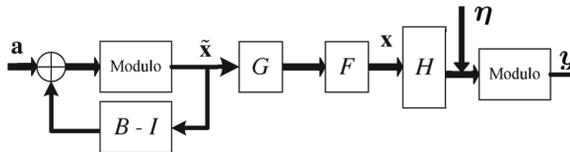
Массивные системы связи с несколькими входами и несколькими выходами (MIMO) играют решающую роль в беспроводной связи. В MIMO можно выделить два основных процесса: UPLINK – передача сигнала от пользователей на базовую станцию и DOWNLINK – передача сигнала от базовой станции пользователю. Важной частью в MIMO является прекодирование сигнала, так как оно направлено на уменьшение помех между параллельно передаваемым потоком данных. Чаще всего используют линейное прекодирование сигнала из-за малой сложности, но при плохом знании канала оно перестает хорошо работать.

Рассмотрим DOWNLINK MIMO систему с  $N_{tx}$  антеннами на базовой станции и  $N_{ue}$  пользователями с одной принимающей антенной. Вектор  $x$  – передаваемый сигнал длины  $N_{ue}$ ,  $P$  – прекодер с размерами  $N_{tx}$  на  $N_{ue}$ ,  $H$  – матрица канала с размерами  $N_{ue}$  на  $N_{tx}$ ,  $\eta$  – шум длины  $N_{ue}$ ,  $y$  – принимаемый сигнал длины  $N_{ue}$ .



Одним из видов линейного прекодирования является Zero-Forcing (ZF). В случае ZF матрица  $P = H^H (HH^H)^{-1}$ . Тогда при идеальном знании канала каждый пользователь получит сигнал, который ему передавали с некоторым шумом  $y_i = x_i + \eta_i, i = 1, \dots, N_{ue}$ . В случае неидеального знания канала пользователь получит не только свой сигнал, но и какую-то часть сигналов других пользователей.

Прекодер Томлинсона-Харашимы (THP) [1] является нелинейным прекодером, так как использует нелинейные преобразования передаваемого сигнала. В формировании прекодера важную роль играет QR-разложение матрицы  $H^H = FS^H$ . Modulo – модульный оператор,  $G = \text{diag}\{1/s_{11}, \dots, 1/s_{N_{ue}N_{ue}}\}$ ,  $B = SG$ .



В данной работе будет представлено сравнение ZF и прекодера Томлинсона-Харашимы при разных сценариях – различное кодирование сигнала; разное количество пользователей, антенн; разная степень зашумленности канала.

Была выполнена реализация симуляции прохождения сигнала через канал на языке PYTHON. Численные эксперименты показали, что THP устойчивее к шумам, чем ZF.

## Литература

1. Khaleghi, Hossein & Falahati, A.. (2008). Tomlinson-Harashima precoding with imperfect channel state information. Communications, IET. 2. 151 - 158. 10.1049/iet-com:20060697.

# МЕТОД МИНИМАЛЬНЫХ НЕВЯЗОК ДЛЯ МНОГИХ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ С ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ВЕКТОРАМИ НАПРАВЛЕНИЙ

Желтков Д.А.<sup>1</sup>, Валиахметов Б.И.<sup>2</sup>, Сукманюк С.В.<sup>3</sup>

1) Институт вычислительной математики РАН, e-mail: dmitry.zheltkov@gmail.com

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: valiahmetovbulat@mail.ru

3) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: s.sukman@yandex.ru

Метод минимальных невязок – это один из итерационных методов решения линейных систем, на каждом шаге которого ищется вектор из крыловского подпространства  $K_k(A, b) = \text{span}(b, Ab, \dots, A^k b)$ , минимизирующий норму невязки.

Один из вариантов реализации данного метода является метод сопряженных невязок (GCR), на  $k$ -й итерации которого требуется построение и хранение двух базисов:  $P_k$  - базиса  $K_k(A, b)$  и  $V_k$  ортонормированного базиса  $AK_k(A, b)$ , где  $AP_k = V_k$ . Для GCR существует его обобщение на случай систем с многими правыми частями [2].

Другой вариант реализации – обобщенный метод минимальных невязок (GMRES), основным достоинством которого является построение одного ортонормированного базиса  $Q_k$  как для  $K_k(A, b)$ , так и для его образа. Это имеет место быть, так как  $AK_k(A, b) \subset K_{k+1}(A, b)$ . При этом, выполнено:  $AQ_k = Q_{k+1}H_{k+1,k}$ .

Ранее первыми двумя авторами был предложен основанный на GMRES метод решения системы с многими правыми частями, требующий хранения только одного базиса и в точной арифметике эквивалентный GCR. Базис  $P_k$  выбирался как разности невязок на соседних итерациях, причем его можно выразить через базис  $Q_{k+n-1}$ :  $AQ_{k+n-1}C_{k+n-1,k} = Q_{k+n}H_{k+n,k}$ , где матрицы  $C_{k+n-1,k}$  и  $H_{k+n,k}$  имеют некоторую структуру.

В нашей работе мы предлагаем изменить выбор базиса  $P_k$  так, чтобы он был ортонормированный, при этом явно его не хранить, а также пересчитывать через  $Q_{k+n-1}$ . Так как очередное крыловское подпространство совпадает с линейной оболочкой невязок с предыдущих итераций, то очередной вектор направления можно искать, ортогонализуя текущую невязку ко всем предыдущим. Однако, зная явный вид невязки на каждой итерации, этот процесс можно существенно упростить, сведя его к ортогонализации вектора размера  $2n$  к подпространству такой же размерности.

Нами выполнена реализация построенного алгоритма на языке C++ с использованием техники шаблонов, а также OpenMP параллелизма. Ортогональность векторов направлений позволяет очень точно вычислять оценку на норму невязки, а также решать системы с более высокой точностью, чем была раньше.

## Литература

1. Saad Y., Schultz M.H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM Journal on scientific and statistical computing. – 1986. – Т. 7. – №. 3. – С. 856-869.
2. Lingen F. J. A Generalised Conjugate Residual method for the solution of nonsymmetric systems of equations with multiple right-hand sides // International journal for numerical methods in engineering. – 1999. – Т. 44. – №. 5. – С. 641-656.

## АНАЛИЗ И ОБРАБОТКА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ МНОГОМАСШТАБНОГО АГРОМОДЕЛИРОВАНИЯ

Мирпулатов И.П.<sup>1</sup>, Гасанов М.Э.<sup>2</sup>, Матвеев С.А.<sup>3</sup>, Абгарян К.К.<sup>4</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИБ,  
e-mail: imirpulatov@yandex.ru

2) Сколтех, САТ, e-mail: Mikhail.Gasanov@skoltech.ru

3) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ВТМ,  
e-mail: matseralex@cs.msu.ru

4) ФИЦ ИУ РАН, e-mail: kristal83@mail.ru

С каждым годом население земли все больше сталкивается с проблемами нехватки продовольствия. Эти проблемы обусловлены различными факторами: увеличением населения, загрязнением окружающей среды и нехваткой воды для орошения сельскохозяйственных культур. Совокупность этих проблем дало развитие агромоделированию по всему миру. В рамках данной работы рассматривается многомасштабная модель WOFOST (WOrld FOod STudies). Это имитационная модель для количественного анализа роста и продуктивности однолетних культур. С помощью WOFOST, имея данные о почве, параметрах культуры, погодных условиях и агротехнологиях, можно рассчитать достижимую урожайность, общую биомассу и необходимое количество воды для полива.

В качестве погодных данных обычно используются различные сценарии погодных условий. В своей работе мы прогнозируем погоду, как временной ряд, и сравниваем полученные результаты с результатами работы модели на реальных погодных данных. Для оценки эффективности метода были выбраны сельскохозяйственные поля в селе Кшень, Курская область, Россия. В эксперименте рассматривается сахарная свекла и озимая пшеница на примере 2015 и 2017 годов. Данные погодного реанализа получены с 2000 по 2020 года при помощи сервиса NASA POWER.

В качестве базовой модели для сравнения с другими моделями мы использовали группировку по среднему значению. Для подготовки базовой модели данные в обучающей выборке были сгруппированы по датам и усреднены по годам. Качество оценивалось при помощи коэффициента детерминации  $R^2$ . Далее применялись два подхода для прогнозирования временных рядов: SARIMA и Prophet. SARIMA - это расширение модели класса ARIMA, которое поддерживает прямое моделирование сезонного компонента ряда. Однако даже при переборе параметров по сетке данная модель не смогла превзойти базовую модель по оценке  $R^2$ . Prophet – это программное обеспечение для прогнозирования временных рядов с открытым исходным кодом, выпущенное Facebook Core Data Science. Prophet дала улучшение по  $R^2$ . На основе прогнозов были сформированы три набора с климатическими данными и переданы на вход модели WOFOST.

Исходя из полученных результатов можно сделать вывод, что в среднем предсказание урожайности модели на реальных и предсказанных климатических данных разнится на 20%, причем в положительную сторону относительно предсказанных – это связано с тем, что предсказанный временной ряд глаже и содержит меньше экстремальных значений, следовательно сельскохозяйственная культура подвергается меньшему стрессу, и ее урожайность при таком сценарии выше.

## ПОСТРОЕНИЕ МЕТРИК СИНТАКТИКО-СЕМАНТИЧЕСКОГО СХОДСТВА ПРЕДЛОЖЕНИЙ

Авагян Д.А.

*МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра алгоритмических языков,  
e-mail: david\_avagyan@list.ru*

Целью данной работы является построение метрики синтактико-семантического сходства предложений русского языка для сопоставления текстов на предмет наличия перифраз, а также выявления описательного, смыслового и мозаичного плагиата [1].

В качестве синтактико-семантического представления предложения выбрано синтаксическое дерево зависимостей, размеченное морфологическими признаками токенов и их векторными представлениями в качестве семантической составляющей. Метрика сходства (ядро свёртки) является вещественной функцией на парах деревьев.

Функция  $s$  сходства двух вершин вычисляется множеством способов: от индикаторной функции совпадения лемм/токенов и меры Жаккара множеств их грамем до расстояния между векторными представлениями. Сходство синтаксических отношений  $q$  ввиду их малого количества задаётся таблично, например, в виде матрицы вида  $(E + (\lambda - 1)I)/\lambda$ , где  $E$  – матрица из всех единиц,  $I$  – единичная матрица,  $\lambda > 1$  – параметр. Возможно также задание функций сходства через метрики расстояния  $\rho$  по формуле  $s = 1 - \rho$  или  $s = 1/(1 + \rho)$  в зависимости от ограниченности метрики  $\rho$  отрезком  $[0; 1]$ .

Сходство синтаксических биграмм вычисляется по формуле

$$\text{sim}(e, \hat{e}) = \frac{s(e_a, \hat{e}_a) + s(e_h, \hat{e}_h)}{2} \cdot q(e_t, \hat{e}_t),$$

где  $e_h$  – главное, а  $e_a$  – зависимое слово в биграмме,  $e_t$  – синтаксическое отношение.

В этой работе предлагаются модификации ядер свёртки, описанных в статье [2]. Данные модификации обладают рядом полезных свойств, включая выполнение аксиом нормированной квазиметрики [3]. Так, для ядра SABK [2] предлагается формула

$$\text{SABK}(T_1, T_2) = \frac{\sum_{e \in T_1} \sum_{\hat{e} \in T_2} \text{sim}(e, \hat{e})}{(|T_1| - 1) \cdot (|T_2| - 1)},$$

где  $e$  и  $\hat{e}$  – рёбра деревьев, а  $|T_i|$  – число вершин в дереве  $T_i$ . Ядро TABK [2] вносит в функцию сходства биграмм веса TF-IDF для токенов. Ядро MSK [2] учитывает информацию о похожих по форме и синтаксическим отношениям поддеревьях, а составное ядро СК [2] есть выпуклая комбинация TABK и MSK.

Описанный подход реализуется в библиотеке `plagcmp` языка Python 3, предлагающей средства формирования автоматических отчётов о сопоставлении текстов и параллельной обработки множества контрольных текстов.

### Литература

1. Воловикова М.Л. Плагиат в научных публикациях: международное измерение //Мировая практика подготовки и продвижения публикаций: материалы 6-й научно-практической конференции. – 2017. – 18-21 апреля. – С. 29-32.
2. Özaş S.B. et al. Sentence Similarity based on Dependency Tree Kernels for Multi-document Summarization //Proceedings of the 10th International Conference on LREC'16. – Portorož, Slovenia: ELRA, 2016. – May. – Pp. 2833-2838.
3. Stein E.M. Harmonic Analysis: Real-Variables Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals / Princeton Mathematical Series, 43 / Monographs in Harmonic Analysis, III. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press. 1993.

# МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ СЛОВООБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ДЕРЕВЬЕВ ДЛЯ РУССКОГО ЯЗЫКА

Большакова Е.И.<sup>1</sup>, Изюмова Д.Д.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ,  
e-mail: eibolshakova@gmail.com

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ,  
e-mail: izmv27593@gmail.com

Задача разработки компьютерных словарей актуальна для создания различных приложений по автоматической обработке текстов (АОТ). В том числе важны словарные ресурсы, в которых представлены словообразовательные (деривационные) связи слов: словообразовательные цепочки (*смелый* → *смелеть* → *осмелеть*) и словообразовательные деревья (совкупности слов с общим корнем, упорядоченные отношениями деривации). Словообразовательная информация применяется в системах АОТ для распознавания смысла новых и редких слов, отсутствующих в словарях (*завируситься*, *удалёнка* и т.п.), для исправления словообразовательных ошибок и др.

В данной работе рассматривается метод автоматического построения словообразовательных деревьев для слов русского языка, с целью создания доступного словообразовательного ресурса, в настоящий момент отсутствующего. Исходными для построения данными выступают слова из словаря [1], уже разобранные на морфемы (корень, приставки, суффиксы, постфиксы: *баз-ов-ый*, *об-морож-ени-е*) и доступные с соответствующей разметкой в датасете RuMorphs-Lemmas [2] (около 96 тысяч слов).

Начальный этап метода состоит в разбиении исходных данных на группы слов одного корня, сложность этого этапа связана наличием в русском языке большого числа корней-алломорфов, которые различаются написанием, но имеют одинаковое значение (*снеговой* – *снежный*, *забирать* – *заберёт*). Для решения этой проблемы была использована информация о типичных чередованиях гласных и наращениях согласных в корнях. Наборы корней-алломорфов, автоматически распознанные согласно правилам чередований, были затем дополнительно вручную верифицированы.

После выделения групп слов с общим корнем (размер групп может достигать до 120 слов разных частей речи) для каждой такой группы строится словообразовательное дерево. Для этого определяется слово-вершина (как правило, слово с наименьшим числом морфем), и последовательно распознаются пары слов, различающиеся одной/двумя морфемами и связанные отношением деривации, после чего все пары организуются в дерево. Разработанный алгоритм построения дерева применяет правила, учитывающие особенности словообразования русского языка [3].

Оценка метода производится путем ручной проверки корректности нескольких десятков построенных деревьев, в сравнении с аналогичными деревьями из [1].

## Литература

1. Тихонов А.Н. Словообразовательный словарь русского языка: В 2 т. Ок. 145 000 слов. – М.: Русский язык, 1990.
2. NLP Datasets [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – URL: <https://github.com/cmcm-snu-ai/NLPDatasets/>
3. Лопатин В.В., Улуханов И.С. Словарь словообразовательных аффиксов современного русского языка. – М.: Изд. Центр “Азбуковник”, 2016.

## ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМОВ С ПОМОЩЬЮ L-ГРАФОВ

Вылиток А.А.<sup>1</sup>, Лай Вэньтао<sup>2</sup>

- 1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра алгоритмических языков,  
e-mail: vylytok@cs.msu.su
- 2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра алгоритмических языков,  
e-mail: lvntao@bk.ru

Понятие алгоритма является одним из важнейших в математике и информатике. Хорошо известны формализации этого понятия, такие как машины Тьюринга и алгоритмы Маркова, изучаемые студентами младших курсов для знакомства с теорией алгоритмов [2]. Однако эти формализации не дают непосредственных приемов построения программ на учебном языке программирования (например, на Паскале).

В докладе рассматриваются методы построения алгоритмов с помощью L-графов [1]. L-граф – это ориентированный граф для описания формальных языков, имеющий на дугах, кроме символов алфавита, специальные скобочные пометки. В общем случае L-графы задают рекурсивно-перечислимые множества.

Детерминированные L-графы позволяют дать им подходящую машинную интерпретацию и использовать их в качестве распознавателей. Например, L-граф без скобок на дугах по сути является конечным автоматом, задавая регулярный язык. Позволяя иметь на дугах скобки одного типа, можно задать бесконтекстный язык. Машинной интерпретацией такого L-графа будет автомат с магазинной памятью. Если позволить на дугах скобки двух типов, то L-граф может представлять как контекстно-зависимые языки, так и рекурсивно-перечислимые. Это эквивалентно добавлению двух стеков к конечному автомату, то есть по своей описательной силе L-графы равны машине Тьюринга.

На основе L-графа можно построить преобразователь слов, добавив на дуги «выходные» символы. По такому L-графу-преобразователю можно построить алгоритм, который одновременно с распознаванием слова во входном алфавите генерирует слово в выходном алфавите. Мы можем представить некоторый алгоритм преобразования слов с использованием L-графа-преобразователя, а затем написать на его основе программу. L-граф-преобразователь удобен для написания программ с использованием стека или рекурсии.

### Литература

1. А. А. Вылиток, П. Г. Сутырин. Характеризация формальных языков графами // Сборник тезисов научной конференции "Тихоновские чтения" (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, 25-29 октября 2010 г. – 2010) М.: Макс-Пресс (2010), с.81-82.
2. Пильщиков В.Н., Абрамов В.Г., Вылиток А.А., Горячая И.В. Машина Тьюринга и алгоритмы Маркова. // М.: Макс-Пресс – 2-е издание – 2016.

## ПЕРЕФРАЗИРОВАНИЕ ТЕКСТОВ НА ЕСТЕСТВЕННОМ ЯЗЫКЕ

Грацианова Т.Ю.<sup>1</sup>, Рогожин Д.А.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ,  
e-mail: TGratsianova@cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ,  
e-mail: den1s.rogozhin@mail.ru

Перефразирование – выражение смысла текста другими словами с сохранением его естественности. Перефразирование используется при автоматической генерации текста, применяется в области поисковой оптимизации и извлечения информации в системах информационного поиска и вопросно-ответных системах, для аугментации текстов (построения дополнительных данных из исходных при решении задач машинного обучения).

Возможны следующие приемы автоматического перефразирования: замена слова (словосочетания) синонимом; вставка, удаление, перестановка слов; соединение нескольких предложений в одно или разделение одного предложения на несколько; изменение всего текста; генерация нового текста.

Перефразирование может осуществляться как с помощью инженерного подхода (по правилам), так и с помощью машинного обучения и нейросетевых технологий.

Для перефразирования по правилам[1] требуются словари синонимов, словари лексических функций, комбинаторные словари, синтаксический анализатор и другие инструменты, на основе которых строятся синонимические преобразования.

Для машинного обучения нужен набор различных текстов, имеющих одинаковый смысл. Например, это может быть множество новостных сайтов и страниц за один и тот же промежуток времени, описывающих одну и ту же реальную ситуацию или событие.

Нейросетевые технологии можно использовать весьма разнообразными способами: как путем построения эмбедингов слов и предложений, так и с помощью готовых инструментов (обученных сетей, программ-переводчиков).

1. **Word2Vec**. Строятся векторные представления (эмбединги) слов из исходного текста с помощью обученной word2vec модели, после чего слова заменяются на похожие на них слова с точки зрения косинусной близости между word2vec векторами.

2. **Маскирование**[2]. Вместо слова, которое необходимо заменить, ставится специальный токен [MASK], после чего используется нейронная сеть, обученная для заполнения пропущенных частей текста, при этом запрещается генерировать исходное слово.

3. **Использование программы-переводчика**: текст переводится на какой-либо промежуточный язык, а затем обратно на исходный. Чтобы новый текст не был идентичен первоначальному, можно запретить нейронной сети при обратном переводе генерировать слишком длинные последовательности слов исходного текста.

Использование гибридных технологий должно соединить преимущества всех описанных методов, объектом исследования может быть возможность комбинирования различных методов, последовательность их применения, способ оценки результатов.

### Литература

1. Juri D.Apresjan, Igor M. Boguslavsky, Leonid L. Iomdin , Leonid L. Cinman , Svetlana P. Timoshenko. 2009. Semantic Paraphrasing for Information Retrieval and Extraction. DBLP, DOI:10.1007/978-3-642-04957-6\_544
2. Nikolay Arefyev, Boris Sheludko, Alexander Podolskiy , Alexander Panchenko. 2020. A Comparative Study of Lexical Substitution Approaches based on Neural Language Models. ArXiv, abs/2006.00031.

# РЕКОМЕНДАЦИИ ФИЛЬМОВ НА ОСНОВЕ ОПИСАНИЙ И ОЦЕНОК ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ

Дубинин В.Д.<sup>1</sup>, Ефремова Н.Э.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ,  
e-mail: vl.dubinin23@gmail.com

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ,  
e-mail: nvasil@list.ru

С появлением сети Интернет человек ежедневно сталкивается с огромным количеством альтернативной информации по любому вопросу (новости, товары и услуги, игры, фильмы и книги и пр.). Как результат, в последние годы значительно вырос интерес к разработке рекомендательных систем.

В данной работе была рассмотрена задача рекомендаций фильмов. Для ее решения необходимо было предложить методы предсказания предпочтения пользователя, где предпочтение – это характеристика, которая показывает отношение пользователя к фильму. Обычно выделяют 3 подхода к предсказанию предпочтений [1]:

1. **На основании признаков описаний (content-based)**: используется описательная информация о пользователях и фильмах.
2. **Коллаборативная фильтрация (collaborative filtering)**: рекомендации строятся исключительно на основании известных системе взаимодействиях (проставление оценок) пользователей с фильмами.
3. **Гибридный подход**: используется композиция методов первых двух подходов.

В рамках данной работы были реализованы методы решения задачи предсказания предпочтения для пары пользователь-фильм и проблемы холодного старта пользователя и фильма. Для предсказания предпочтения был выбран метод SVD, потому что он показывает один из лучших результатов на реальных данных [2]. Данный метод также позволяет строить вектора факторов для пользователей и фильмов по оценкам. Здесь вектор факторов для фильма – это особенности, которым обладает фильм, а вектор факторов для пользователя – это особенности, которые нравятся пользователю.

При решении проблемы холодного старта пользователя было предложено учитывать его жанровые предпочтения. На их основе из уже известных системе выбираются пользователи, наиболее похожие на нового. Для выбора используются алгоритмы KNN и K-Means; схожесть пользователей определяется как косинусная мера между соответствующими им векторами жанровых предпочтений.

При решении проблемы холодного старта фильма было принято решение использовать их сюжеты, и с помощью языковой модели (RuBERT, MultilingualBERT) и нейросетевой модели (DNN, CNN, RNN) предсказывать вектор факторов фильма.

Для оценки качества работы выбранных методов был составлен набор данных. Наилучшие результаты показали:

- для предсказания предпочтения – метод **SVD**;
- для решения проблемы холодного старта пользователя – метод **KNN**;
- для решения проблемы холодного старта фильма – методы **RuBERT + DNN** и **MultilingualBERT + DNN**.

## Литература

1. Adomavicius, G. Toward the next generation of recommender systems: a survey of the state-of-the-art and possible extensions // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering.—2005.—Vol.,17, no.,6.—с.734–749
2. Bennett, J. The netflix prize // In KDD Cupand Workshop in conjunction with KDD.—2007.

# ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ АКТИВНОГО ШУМОПОДАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИГНАЛОВ

Полевой А.В.<sup>1</sup>, Корухова Ю.С.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра алгоритмических языков,  
e-mail: polevoianton@bk.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра алгоритмических языков,  
e-mail: yulia@cs.msu.ru

В настоящее время проблема шумового загрязнения в городах продолжает оставаться актуальной.

Активное шумоподавление – это метод устранения нежелательного сигнала, путём суммирования исходного сигнала со специально подобранным выходным сигналом. Существующие работы затрагивают сравнение подходов для поиска наилучшей конфигурации весов для стабильной работы фильтров [3], развитие методов фильтрации при помощи обучения с подкреплением [1], нейросетей [2], а также других нелинейных методов оптимизации. При этом сравнение приводится либо на модельных данных, либо в симуляции, что существенно упрощает постановку задачи.

В работе была поставлена задача выполнить сравнение существующих методов на шумах разного происхождения. Большой интерес представляет развитие методов шумоподавления для определения вторичного пути и разработка комбинированного подхода при помощи нейросетевых моделей.

В рамках обзора были отмечены преимущества нелинейных фильтров для нестационарных сигналов, стабильность и техники для обеспечения устойчивости линейных фильтров для стационарных сигналов. Кроме этого, было замечено слабое применение нейросетей для моделирования нелинейностей в задаче активного шумоподавления. Поэтому в рамках данной работы, нами предложен комбинированный подход, в котором линейный фильтр работает вместе с нейросетью. Были проведены эксперименты, демонстрирующие преимущество предлагаемого подхода над классическими методами фильтрации.

Лучшие результаты показали предлагаемые комбинированные методы активного шумоподавления. Результаты экспериментов показали преимущества комбинированного подхода для активного шумоподавления. Было получено улучшение на 7 dB для речевых сигналов и 10 dB для шума (наибольшая полоса подавления до 1 kHz). Сделаны выводы о применимости оценки передаточной функции уха и предложено развитие для этой идеи.

## Литература

1. Anderson E. R., Steward B. L. Reinforcement Learning for Active Noise Control in a Hydraulic System //Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. – 2021. – Т. 143. – №. 6.
2. Biradar R. et al. Implementation of an Active Noise Cancellation Technique using Deep Learning //2022 International Conference on Inventive Computation Technologies (ICICT). – IEEE, 2022. – С. 249-253.
3. Huang B. et al. A variable step-size FXLMS algorithm for narrowband active noise control //IEEE transactions on audio, speech, and language processing. – 2012. – Т. 21. – №. 2. – С. 301-312.

# СИСТЕМА ПОИСКА ТЕКСТОВ ПО ФОРМУЛАМ ДЛЯ МОБИЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

Рязанова Е.Б.<sup>1</sup>, Корухова Ю.С.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Алгоритмических языков,  
e-mail: j.ryazanova2010@yandex.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Алгоритмических языков,  
e-mail: yulia@cs.msu.ru

В настоящее время большое количество научных статей, исследований и книг преобразованы в цифровую форму и опубликованы на общедоступных ресурсах. Важной составляющей научных работ, особенно в естественных науках и инженерных дисциплинах, являются формулы. Но большинство известных современных поисковых систем не предоставляют возможности поиска по формулам [1]. Математическая поисковая система решает множество проблем, возникающих как при написании собственных научных статей, так и при изучении естественных наук.

В данной работе изучены существующие системы, осуществляющие поиск по формулам. Также в работе предложен подход к созданию системы математического поиска для коллекций документов, в том числе содержащих отсканированные изображения: подобраны программные инструменты и библиотеки, позволяющие автоматически переводить формулы в структурированный вид и определять некоторые из эквивалентных искомой формулы. Метод индексирования и нечеткого поиска основан на подходе, предложенном в работе [2], однако реализация выполнена для мобильных устройств.

Прототипная программная система математического поиска, совместимая с мобильными устройствами, имеет клиент-серверную архитектуру. Клиентский модуль написан на языках Java и Kotlin для операционной системы (далее — ОС) Android, серверный модуль построен на базе фреймворка FastAPI на языке Python3. Представление структуры формул выполнено в виде дерева подстановок. Информация о формулах хранится в виде базы данных на мобильном устройстве с ОС Android, а также на сервере в формате JSON. Формат структурированного представления формул — LaTeX, однако индексирование и поиск производится как по структурированным документам, так и по коллекции отсканированных изображений.

Таким образом, в рамках данной работы предложен подход к решению задачи поиска по заданной формуле текстов, в которых содержится либо сама формула, либо похожие на нее. Выбрано представление индекса в виде дерева подстановок формул со ссылками на базу данных, что позволяет получить доступ к документу и оценить количество различий в формулах. Выполнена прототипная реализация системы математического поиска для мобильных устройств.

## Литература

1. Маннинг К. Д., Рагхаван П., Шютце Х. Введение в информационный поиск. Издательство Вильямс. 2011.
2. Кригер К.П., Корухова Ю.С. Об одном подходе к индексированию и поиску математических формул // Ломоносовские чтения. Научная конференция. 14–22 апреля 2022 г.: тезисы докладов. – Москва: Издательский отдел факультета ВМК МГУ, стр. 65.

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СУБД REDIS В ВЫСОКОНАГРУЖЕННЫХ СИСТЕМАХ

Никулин Л.Р. <sup>1</sup>, Полякова И.Н. <sup>2</sup>

- 1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ,  
e-mail: [scrooge228@gmail.com](mailto:scrooge228@gmail.com)
- 2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ,  
e-mail: [polyakova@cs.msu.ru](mailto:polyakova@cs.msu.ru)

Основная задача в данной работе была переписать существующий кэш данных, уйдя от использования уже не поддерживаемых технологий, получить высокую доступность данных, высокую персистентность данных, увеличить скорость работы кэша. Решение также должно уметь хорошо масштабироваться в случае роста нагрузки.

В предлагаемой работе проведено сравнение существующих СУБД, на основании которого была выбрана СУБД Redis. На языке программирования C++ (стандарт C++20) [1] и его общедоступном фреймворке `userver` [2] был написан микросервис для проксирования запросов на чтение и запись в Redis [3]. Микросервис был интегрирован с остальными сервисами через REST API. Микросервис держит нагрузку более 40000 запросов в секунду.

Для получения высокой персистентности данных используются периодическая запись всех данных в RDB-файл на диск.

Для получения высокой доступности используется репликация данных на другие хосты Redis – реплики. Если ведущий хост Redis перестаёт отвечать на запросы, то одна из реплик становится новым ведущим.

Для работы под высокой нагрузкой, особенно на запись, Redis был шардирован. Сервис легко масштабируется горизонтально за счёт шардирования и репликации Redis, а также добавления новых хостов микросервиса. Для более компактного хранения данных используется сериализация в `Protobuf`.

К микросервису написаны тесты на фреймворке `Pytest` языка программирования Python.

## Литература

1. Документация C++ – 2022. – (дата обращения 02.10.2022). URL: <https://en.cppreference.com/w/>
2. Документация `userver` и его исходные файлы – 2022. – (дата обращения 02.10.2022). URL: <https://github.com/userver-framework>
3. Документация Redis – 2022. – (дата обращения 02.10.2022). URL: <https://redis.io/>

# ПРОГРАММНЫЙ ИНТЕРФЕЙС БАЗЫ ЗНАНИЙ ПОСТРОЕНИЯ НАУЧНЫХ СТАТЕЙ

Полякова И.Н.<sup>1</sup>, Сорокина Н.В.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ,  
e-mail: polyakova@cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ,  
e-mail: sorengln@mail.ru

Научная статья является важным условием эффективного общения с широкой общественностью в академической и профессиональной сфере исследователя. Оформление новых теоретических и практических знаний в виде публикации требует грамотного изложения условий проведения исследования и полученных результатов, предоставляя возможность донести новые открытия до специалистов разных областей науки. Однако задача описания процесса получения научного знания является трудоемкой, особенно для начинающих ученых.

Существующие исследования построения научных статей раскрывают общие практики, подходы и приемы представления научной работы, придерживаясь которых можно грамотно изложить процесс и результаты исследования в виде научной статьи [1]. Решение проблемы поиска лучших практик написания научных работ поможет в значительной степени упростить репрезентацию полученных в ходе научного процесса результатов и сократить время написания научной работы.

В данной работе проводится анализ исследований процесса построения научных статей и структуризация отобранной в ходе анализа информации. Сформированная база знаний содержит ключевые приемы и методики написания научных работ по аспектам содержательных частей, а также иллюстрирующие применение подходов примеры [2]. Выделенная структура ложится в основу создания базы данных и программного интерфейса, осуществляющего обработку и доступ к разработанной базе знаний, в виде серверной части веб-приложения.

Существенным результатом данной работы является совокупность подходов и практик построения научных статей в виде единой базы знаний. Реализация программного интерфейса позволяет гибко подключать и использовать сервис как в уже существующих пользовательских веб-приложениях, так и как самостоятельную серверную часть.

## Литература

1. Margaret Cargill, Patrick O'Connor. Writing Scientific Research Articles Strategy and Steps // School of Earth and Environmental Sciences the University of Adelaide / под ред. Wiley-BlackWell 2009.
2. How to Write a Good Scientific Paper (ISBN 9781510619135) // SC14: Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE). IEEE, 2018.

# ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА ИДЕНТИФИКАЦИИ СЕМАНТИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ В ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКОЙ СЕТИ

Широкова А.С.<sup>1</sup>

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра алгоритмических языков,  
e-mail: astasiya2000@icloud.com

В современном мире человек в своей профессиональной и повседневной деятельности постоянно сталкивается с огромным количеством информации, а объёмы новых знаний увеличиваются с огромной скоростью. Значительная часть информации обычно представлена в виде набора статей, что делает важными задачи структурирования знаний и систематизации терминов предметных областей.

В качестве описания предметных областей традиционно используются терминологические сети, представляющие собой графы, в которых вершинами являются термины и понятия, а дугами – определенные для них семантические отношения [1]. Создание таких сетей требует огромных затрат и ресурсов, поэтому на практике часто ограничивается множество возможных семантических связей между терминами. Такая модель данных позволяет говорить, что процесс раскрытия понятия состоит из выявления связанных с ним терминов и семантических отношений между ними [2].

В данной работе рассматриваются частных случаи терминологической сети, в которой множество отношений состоит из двух элементов: «это есть», «относится к» [1], а также ранее разработанный алгоритм идентификации семантических связей между двумя терминами, реализованный на основе предметной области «Музыка». Данный алгоритм позволяет выявить и конкретизировать до более узкой связь по описанной выше терминологической сети на основе закономерностей, присущих определенным связям.

Многие исследования в области терминологии обосновывают возможность выявления общих особенностей взаимосвязей между понятиями одной предметной области [3], поэтому данный алгоритм исследовался на потенциальное использование с различными предметными областями, представленными терминологической сетью.

В ходе работы было дополнительно проведено исследование алгоритма на других предметных областях с различными семантическими отношениями, как выявленными в предметной области «Музыка», так и не встречающимися в ней. Это позволило сформулировать основные предположения по изменению реализованного алгоритма для расширения возможностей его применения. Были предложены: обобщение правил определения связей, относящихся к одному типу, дополнение правил для ранее не изученных случаев и для уточнения определяемых связей. На основе полученных результатов были доработаны и реализованы дополнительные функции алгоритма.

## Литература

1. Мальковский М.Г., Соловьев С.Ю. Терминологические сети // Материалы II Международной научно-технической конференции «Открытые семантические технологии проектирование интеллектуальных систем (OSTIS-2012)» // Минск: БГУИР, 2012 – с. 77-82.
2. Орлова М.В. Теоретические обоснования термина как языкового явления // Учёные записки. Научный журнал Курского государственного университета, 2010 – с.64-68.
3. Лату М. Н., Левит А. А. Изучение системности термина при помощи семантической сети // Вестник КИГИ РАН, 2016 – с.116-124.

## ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ ОТЕЧЕСТВЕННЫХ СПРАВОЧНЫХ ПРАВОВЫХ СИСТЕМ

Ветров А.Г.

*Российский государственный гуманитарный университет, факультет Управления, кафедра «Моделирование в экономике и управлении», e-mail: agve@mail.ru*

Межотраслевая автоматизированная информационно-поисковая система о нормативных правовых актах СССР и союзных республик» (ИПС «Законодательство») разрабатывалась силами Научного центра правовой информации при ВНИИ советского законодательства Министерства юстиции СССР (НЦПИ) с 1976 года и действовала с 1982 года практически десять лет.

Основными функциями АИПС предполагались следующие: подготовка, ввод, контроль, корректировка и хранение в виде, удобном для автоматизированной обработки нормативных актов СССР и союзных республик, подлежащих государственному учету, а также другой правовой информации, представляющей интерес для абонентов системы; внесение в информационные массивы коррективов, обусловленных изменением и признанием нормативных актов СССР и союзных республик утратившими силу; информационно-правовое обслуживание абонентов в режиме ретроспективного поиска по разовым запросам; избирательное распространение правовой информации по постоянным запросам абонентов; выдачу копий нормативных актов; тиражирование информационных массивов для автоматизированных систем правовой информации; выпуск информационных изданий, справочно-информационных материалов.

Задачи, решаемые системой, объединялись в группы, условно именуемые подсистемами.

Разработанная система АИПС «Законодательство», принципы ее построения, технология функционирования стала опытным полигоном для всех последующих справочных правовых системах, созданных позже в Российской Федерации, активное развитие которых началось в конце девяностых годов с появлением компьютеров новой архитектуры и резкого роста числа потребителей систем правовой информации.

Проектные решения системы и опыт эксплуатации впоследствии были учтены в разработках систем отрасли как государственными разработчиками, так и коммерческими компаниями, обслуживающих в настоящее время данную сферу правовой информатики. И сейчас мы пользуемся современными справочными правовыми системами «КонсультантПлюс», «Гарант», «Кодекс», «Референт» и др., которые учитывали при разработке проектные решения АИПС «Законодательство», реализованные на иной архитектурной платформе.

### Литература

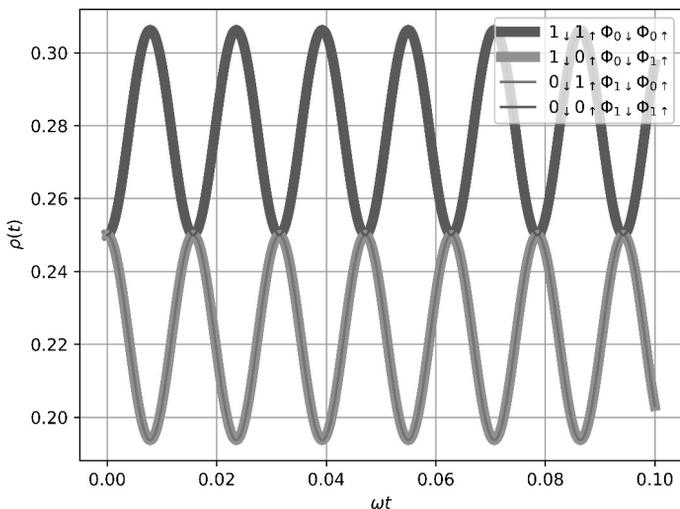
1. Ветров А.Г. Основные проектные решения АИПС «ЗАКОНОДАТЕЛЬСТВО» - первой отечественной справочной правовой системы //в сб. «Правовой мониторинг». Выпуск 11. История и развитие правовой информатизации (по материалам Второй международной научно-практической конференции, 04 июня 2010 г.), М.: ФГУ НЦПИ при Минюсте России – 2010 -- с. 12-17.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ АССОЦИИИ - ДИССОЦИИИ ДВУХУРОВНЕВЫХ ИСКУССТВЕННЫХ АТОМОВ В МНОГОМОДОВОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

Викторова Н.Б.<sup>1</sup>, Ли Ваншунь<sup>2</sup>, Мяо Хуэй-хуэй<sup>2</sup>, Цзянчуань Ю.<sup>2</sup>, Чень Жань<sup>2</sup>,  
Ожигов Ю.И.<sup>2,3</sup>

- 1) РГГУ, Институт информационных наук и технологий безопасности. Факультет информационных систем и безопасности, кафедра. КФПМ, e-mail: nbvictorova@list.ru
- 2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СКИ, e-mail: ozhigov@cs.msu.ru
- 3) Физико-технологический институт РАН

Ассоциация двух искусственных атомов описывается квантовым основным уравнением или его модификациями для гамильтониана взаимодействия системы двух валентных электронов с полем, состоящим из атомной и молекулярной мод. Фактором декогерентности здесь является утечка фотонов обеих мод из полости. Для неподвижных атомов, сближенных до расстояния образования молекулы атомная мода предполагается отсутствующей, и взаимодействие идет только с молекулярной модой, разделенной на два уровня в зависимости от направления спинов электронов: спин вверх и спин вниз. В отсутствии фотонов, поворачивающих спин электрона, мы имеем только две моды, поднимающие молекулярную орбиту электрона.



На рисунке изображены результаты моделирования (см. работу [1]) в графическом представлении.

## Литература

1. Miao Hui-hui, Ozhigov Y.I., Modeling and simulating formation of neutral hydrogen molecule in Tavis-Cummings-Hubbard model, <https://arxiv.org/pdf/2209.09607.pdf>

# ИНФОРМАЦИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ В МОДЕЛИ MAPREDUCE

Голубцов П.В.<sup>1</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра математики,  
e-mail: golubtsov@physics.msu.ru

В задачах больших данных собрать все относящиеся к исследованию данные на одном компьютере, как правило, невозможно и непрактично, поскольку один компьютер не сможет обработать их в разумные сроки. Адекватный алгоритм анализа данных должен, параллельно работая на многих компьютерах, извлекать из каждого набора исходных данных некоторую промежуточную компактную «информацию», постепенно объединять ее и, наконец, использовать накопленную информацию для получения результата. На таком принципе основана обработка данных в модели распределенных вычислений MapReduce [1]. В работе [2] было показано, что для эффективной обработки распределенных данных ключевую роль играет построение специальной алгебраической структуры – информационного пространства. Данная работа посвящена алгебраической формализации и исследованию оптимальных информационных пространств.

Пусть на вход процедуры обработки поступают наборы элементов из множества  $D$ , а результаты обработки являются элементами множества  $R$ . Поскольку результат обработки обычно не должен зависеть от порядка поступления данных, удобно представлять пространство всевозможных наборов исходных данных *свободным коммутативным моноидом*  $D^+$ , элементами которого являются конечные мультимножества на  $D$ . Тогда *процедура обработки* с наборами данных из множества  $D$  и результатами из множества  $R$  определяется как отображение  $p: D^+ \rightarrow R$ .

*Информационное пространство* (ИП)  $(U, q, r)$  для процедуры  $p: D^+ \rightarrow R$  – это коммутативный моноид  $U$ , оснащенный парой отображений: сюръективным гомоморфизмом  $q: D^+ \rightarrow U$  и отображением  $r: U \rightarrow R$ , такими что  $r \circ q = p$ . Фактически, гомоморфизм  $q$  «сжимает» исходные данные без потери информации, а его сюръективность обеспечивает отсутствие «лишних» элементов в  $U$ . Будем говорить, что ИП  $(U, q, r)$  *лучше*, чем  $(U', q', r')$  и обозначать это как  $(U, q, r) \preceq (U', q', r')$ , если существует гомоморфизм  $h: U' \rightarrow U$  такой что  $h \circ q' = q$ . Будем говорить, что элементы  $x$  и  $y$  из  $U$  *неразличимы* относительно  $r: U \rightarrow R$ ,  $(x \sim_r y)$ , если  $\forall z \in U \ r(x + z) = r(y + z)$ .

**Теорема 1.** *Оптимальное ИП для процедуры  $p: D^+ \rightarrow R$  существует и с точностью до изоморфизма совпадает с фактормоноидом  $D^+ / \sim_p$  по конгруэнции неразличимости.*

Следующее утверждение дает удобный критерий оптимальности.

**Теорема 2.** *ИП  $(U, q, r)$  является оптимальным тогда и только тогда, когда все его элементы различимы относительно  $r: U \rightarrow R$ .*

Использование *оптимального* ИП позволяет максимально эффективно распараллеливать процесс накопления информации используя модель распределенного анализа данных MapReduce [1], где Map применяет гомоморфизм  $q$  к наборам исходных данных и преобразует их в элементы ИП, а Reduce объединяет эти фрагменты частичной информации в один элемент, представляющий все исходные данные.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 19-29-09044.

## Литература

1. Dean, J. and Ghemawat S. MapReduce: simplified data processing on large clusters //Communications of the ACM, (2008) **51**, №1, pp. 107–113.
2. Голубцов П.В. Понятие информации в контексте задач обработки больших данных //ИТИ Сер. 2. Информационные процессы и системы. (2017) №1, с. 31–36.

# МЕТОДЫ ОРГАНИЗАЦИИ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПРЕДОБРАБОТКИ ДАННЫХ ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ НЕЙРОСЕТЕЙ

Вахрушев В.Ю.<sup>1</sup>, Шубин М.В.<sup>2</sup>, Попова Н.Н.<sup>3</sup>, Буряк Д.Ю.<sup>4</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, ВМК, кафедра СКИ, e-mail: [pristmanabern@yandex.ru](mailto:pristmanabern@yandex.ru)

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, ВМК, кафедра СКИ, e-mail: [mih.shub@gmail.com](mailto:mih.shub@gmail.com)

3) МГУ имени М.В.Ломоносова, ВМК, кафедра СКИ, e-mail: [popova@cs.msu.ru](mailto:popova@cs.msu.ru)

4) МГУ имени М.В.Ломоносова, ВМК, кафедра СКИ, e-mail: [dyb04@yandex.ru](mailto:dyb04@yandex.ru)

Предварительная обработка данных является важным этапом процесса обучения нейросетей, оказывающим существенное влияние на общее время обучения нейросетей [1]. Одной из проблем для максимально эффективного использования GPU при обучении НС являются задержки на подготовку данных для вычисления градиентов алгоритмом обучения. Данные для обучения формируются в виде пакетов, при этом обычно исходные данные подвергаются дополнительным преобразованиям. Общепринятым подходом для решения данной проблемы является использование CPU для подготовки пакетов данных. При этом в идеальном случае выполнение функций преобразования и подготовки данных должно осуществляться асинхронно с обработкой пакетов мини-батчей подготовленных образцов на GPU.

В докладе представлен подход к реализации мультипроцессинга для поддержки предварительной обработки данных на многоядерных платформах. Подход реализован в виде библиотеки ParLoader, предоставляющей пользователю ряд параметров для настройки эффективности предварительной обработки с учетом особенностей конкретной задачи. В докладе рассмотрены результаты экспериментального исследования разработанной библиотеки на примере ее использования в рамках фреймворка Pytorch на суперкомпьютере Ломоносовов-2 [2]. Показано, что разработанная библиотека практически во всех случаях превосходит по производительности библиотеку Dataloader, реализованную в фреймворке Pytorch.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 20-07-01053 А).

## Литература.

1. Mohan J., Phanishayee A., Raniwala A., Chidambaram V. Analyzing and Mitigating Data Stalls in DNN Training. //PVLDB, 2021. V.14, no.5, pp.771–784, doi: 10.14778/3446095.3446100
2. Voevodin V.I., Antonov A., Nikitenko D., Shvets P., Sobolev S., Sidorov I., Stefanov K., Voevodin Vad., Zhumatiy S. Supercomputer Lomonosov-2: Large Scale, Deep Monitoring and Fine Analytics for the User Community. //Supercomputing Frontiers and Innovations, 2019. V.6, no.2, pp.4–11, doi: 10.14529/jsfi190201

# ОБ ОДНОМ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ АЛГОРИТМЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ

Никольский И.М.<sup>1</sup>, Соловьёв А.Ю.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СКИ,  
e-mail: inikolsky@cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СКИ,  
e-mail: solovyov.it@gmail.com

Реконструкция поверхности - процесс получения трёхмерной полигональной модели на основе облака точек. Под облаком точек понимается набор трёхмерных точек с координатами (x,y,z). Такие облака могут быть получены с помощью трёхмерных сканеров, камер глубины и лидаров. Трёхмерное сканирование используется, в частности, в геоинформационных системах для создания цифровой модели рельефа местности.

Для получения максимально точной модели сканируемого объекта необходимо большое количество точек. Современные сканеры обладают высоким разрешением, количество точек в сканах может достигать сотен миллионов. Для реконструкции поверхности по данным такого объёма требуются огромные вычислительные мощности и объёмы памяти, поэтому для решения данной задачи целесообразно использовать суперкомпьютеры.

В данной работе предложен параллельный метод реконструкции полигональной поверхности объекта, для вычислительных систем с общей памятью. За основу было взято семейство явных алгоритмов, использующих диаграмму Вороного [1]. Приводятся результаты сравнения производительности полученного решения с существующей реализацией явного метода реконструкции поверхности из библиотеки CGAL и исследования эффективности разработанного алгоритма. Кроме того, предложена модификация данного метода для высокопроизводительных систем с распределённой памятью.

## Литература

1. N. Amenta, M. Bern, M. Kamvysselis. A new Voronoi-based surface reconstruction algorithm // In: The proceeding of computer graphics. 1998. pp. 415–421.

# ОБЗОР НЕЙРОСЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ В ЗАДАЧЕ ГРАММАТИЧЕСКОЙ КОРРЕКЦИИ РУССКОЯЗЫЧНЫХ ТЕКСТОВ

Цуканова М.А.<sup>1</sup>, Ершов Н.М.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СКИ,  
e-mail: cukanovaa93@gmail.com

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АНИ,  
e-mail: ershov@cs.msu.ru

Настоящая работа посвящена вопросам применения методов машинного обучения для грамматической коррекции русскоязычных текстов, в том числе, в русской дореформенной орфографии. Анализируются особенности данной задачи и области её применения. Проводится обзор существующих методов и программных средств для решения рассматриваемой проблемы. Предлагается подход к решению данной задачи, основанный на использовании искусственных нейронных сетей, решающих задачу text-to-text generation. Рассматривается структура следующих моделей: сети seq2seq, transformers, сети с механизмом внимания. Приводятся предварительные результаты исследования эффективности предложенных подходов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 20-07-01053 А).

## Литература

1. Ashish Vaswani, N. S. (6 декабря 2017 г.). *Attention Is All You Need*. Получено из <https://arxiv.org/pdf/1706.03762.pdf>.
2. Kyunghyun Cho, B. v. (3 сентября 2014 г.). Learning Phrase Representations using RNN Encoder–Decoder for Statistical Machine Translation. Получено из <https://arxiv.org/pdf/1406.1078.pdf>.
3. Ilya Sutskever, O.V. (10 сентября 2014 г.). *Sequence to Sequence Learning with Neural Networks*. Получено из <https://arxiv.org/abs/1409.3215>.

# РАСПОЗНАВАНИЕ ИМЕНОВАННЫХ СУЩНОСТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЙРОСЕТЕВЫХ АЛГОРИТМОВ, ОСНОВАННЫХ НА АРХИТЕКТУРЕ ТРАНСФОРМЕРОВ

Гайсин Р.Р.<sup>1</sup>, Ершов Н.М.<sup>2</sup>

- 1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СКИ, e-mail: geleg.rigzin@mail.ru  
2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АНИ, e-mail: ershov@cs.msu.ru

Целью настоящей работы является исследование эффективности нейросетевых методов машинного обучения, основанных на архитектуре трансформеров, для решения задачи распознавания и классификации именованных сущностей в русскоязычных текстах. В качестве базовой модели для проведения исследований была выбрана модель RuBERT, являющаяся реализацией модели BERT-base для русского языка. Были использованы предобученные эмбединги RuBERT, а также архитектура слоёв этой нейросети. Был подготовлен специальный обучающий датасет из текстов мемуаров ВОВ для настройки модели на решение задачи поиска именованных сущностей в специфическом корпусе текстов. Выбранная модель была обучена на собранном датасете. Обученная в рамках работы модель была протестирована на тестовом датасете, собранном из текстов из интересующей области (документы для его составления не были использованы в тренировочном датасете). Были получены оценки точности полноты и  $F$ -меры для решения задачи распознавания и классификации именованных сущностей. При тестировании было достигнуто значение  $F$ -меры 0.947, при использовании базовой модели на тех же данных этот показатель был равен 0.83. Достигнутые результаты позволяют сделать вывод о перспективности использования выбранной архитектуры нейросети для решения задач распознавания именованных сущностей. Важным преимуществом использования BERT в задачах обработки естественных языков является отсутствие необходимости использовать большое количество признаков при подготовке обучения, то есть модели не нужно знать часть речи классифицируемого слова, его словарную форму и так далее, так как все необходимые для правильной классификации признаки она может найти сама за счёт своей архитектуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 20-07-01053 А).

## Литература

1. Ashish Vaswani, Noam Shazeer, Niki Parmar, Jakob Uszkoreit, Llion Jones, Aidan N. Gomez, Lukasz Kaiser, and Illia Polosukhin. 2017. Attention is all you need. In Proceedings of the 31st International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS'17). Curran Associates Inc., Red Hook, NY, USA, 6000–6010.
2. Jacob Devlin, Ming-Wei Chang, Kenton Lee, Kristina Toutanova. BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding. Google AI Language, 2019
3. Ian Tenney, Dipanjan Das, Ellie Pavlick. BERT Rediscovered the Classical NLP Pipeline. Google Research, Brown University, 2019
4. Mikhail Arkhipov, Maria Trofimova, Yuri Kuratov, Alexey Sorokin. Tuning Multilingual Transformers for Named Entity Recognition on Slavic Languages. ACL-2019, Balto-Slavic Natural Language Processing workshop, 2019
5. William Fedus, Barret Zoph, Noam Shazeer. Switch Transformers: Scaling to Trillion Parameter Models with Simple and Efficient Sparsity. Journal of Machine Learning Research 23 (2022) 1-40

# ПОСТРОЕНИЕ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ СУПЕРКОМПЬЮТЕРНОГО КОМПЛЕКСА

Тимошкин М.А.<sup>1</sup>, Соболев С.И.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК;

Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ имени М.В.Ломоносова,  
e-mail: timoshkin.michail@gmail.com

2) Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ имени М.В. Ломоносова,  
e-mail: sergeys@parallel.ru

Современный суперкомпьютер состоит из множества связанных компонентов различной природы, которые, как правило, физически размещены на достаточно больших площадях. Отслеживать постоянно меняющиеся рабочие характеристики компонентов, такие как загруженность вычислительных узлов или температуру воздуха на выходе кондиционеров только лишь по идентификаторам и виртуальным адресам может быть непросто. Компоненты суперкомпьютера подвержены сбоям и поломкам, которые важно оперативно находить и устранять. Для администраторов было бы полезно иметь специальные методы отображения состояния компонентов суперкомпьютера, которые позволяли бы наглядно контролировать его работоспособность.

Одним из решений этой задачи может стать визуальная трёхмерная модель суперкомпьютерного комплекса, на которой будут показаны его важнейшие компоненты с возможностью динамического отображения их рабочих характеристик. Администраторы получают возможность оперативно сопоставлять данные мониторинга с их физическим распределением по суперкомпьютеру. Трёхмерная модель поможет представить общую «картину» работы суперкомпьютера. Кроме того, подобная модель может использоваться, например, для образовательных целей.

Модель суперкомпьютера может быть описана в виде ориентированного ациклического графа, в котором вершины соответствуют компонентам суперкомпьютера, а ребра – связям между ними. В рамках проекта Octotron [1] ранее были созданы такие модели для суперкомпьютеров МГУ «Ломоносов-1» и «Ломоносов-2». Для настоящей работы были использованы упрощенные модели из этого проекта, в которых были оставлены только связи, отражающие физическую вложенность одного компонента в другой.

Для реализации сервиса были выбраны следующие технологии: для построения визуальной трёхмерной модели – язык JavaScript и библиотека Three.js, интерфейс пользователя – HTML + CSS с набором инструментов Bootstrap. Описание модели суперкомпьютера в виде графа представлено в виде структуры JSON.

В качестве рабочих характеристик в разработанном сервисе на трёхмерной модели суперкомпьютера «Ломоносов-2» отображаются температуры процессоров узлов, их статус, средняя загруженность и другие. На основе сервиса также создан виртуальный музей суперкомпьютера «Ломоносов-1» с возможностью прохождения экскурсии.

## Литература

1. Antonov A., Nikitenko D., Shvets P., Sobolev S., Stefanov K., Voevodin Vad., Voevodin Vl., Zhumatiy S. An approach for ensuring reliable functioning of a supercomputer based on a formal model //Parallel Processing and Applied Mathematics. 11th International Conference, PPAM 2015, Krakow, Poland, September 6-9, 2015. Revised Selected Papers, Part I, Lecture Notes in Computer Science, vol. 9573, pp. 12–22. Springer International Publishing. – 2016.

# ОБЗОР И АНАЛИЗ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ РАБОТЫ С ПОПУЛЯЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ ОПТИМИЗАЦИИ

Николашкин А.Г.<sup>1</sup>, Ершов Н.М.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СКИ, e-mail: nagvv97@mail.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АНИ, e-mail: ershov@cs.msu.ru

Актуальным подходом к решению многомерных задач непрерывной и дискретной оптимизации является применение популяционных методов оптимизации [1], к которым относятся прежде всего эволюционные алгоритмы, такие как генетические алгоритмы или метод дифференциальной эволюции, а также алгоритмы роевой оптимизации, например, метод роя частиц, алгоритм бактериального поиска и т.д. И для работы с такими алгоритмами на протяжении последних десятков лет разрабатываются различные программные библиотеки, и приоритеты, фокусы а также подходы данных библиотек во многом разнятся между собой.

В докладе представлены обзор и результаты анализа существующих на данный момент программных библиотек и фреймворков фокусирующихся на решении оптимизационных задач популяционными методами. А также приводятся результаты сравнительного анализа возможностей и особенностей рассматриваемых библиотек, в особенности способность использования методов параллельных вычислений для ускорения решения проблем.

В работе также для избранных библиотек в результате сравнительного анализа проведены вычислительные эксперименты для нескольких популяционных методов оптимизаций на различных оптимизационных проблемах. По итогам проведённых экспериментов в докладе приводится анализ и сравнение результатов работы избранных программных библиотек, включая масштабируемость по процессам.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 20-07-01053 А).

## Литература

1. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации // М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана – 2014.
2. De Rainville F. M. et al. Deap: A python framework for evolutionary algorithms //Proceedings of the 14th annual conference companion on Genetic and evolutionary computation. – 2012. – С. 85-92.
3. Coletti M. A., Scott E. O., Bassett J. K. Library for evolutionary algorithms in Python (LEAP) //Proceedings of the 2020 Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion. – 2020. – С. 1571-1579.
4. Biscani F., Izzo D. A parallel global multiobjective framework for optimization: pagmo //Journal of Open Source Software. – 2020. – Т. 5. – №. 53. – С. 2338.
5. Dreoj J. et al. Paradiseo: from a modular framework for evolutionary computation to the automated design of metaheuristics: 22 years of Paradiseo //Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion. – 2021. – С. 1522-1530.
6. Benítez-Hidalgo A. et al. jMetalPy: A Python framework for multi-objective optimization with metaheuristics //Swarm and Evolutionary Computation. – 2019. – Т. 51. – С. 100598.
7. Fawzy Gad A. PyGAD: An Intuitive Genetic Algorithm Python Library //arXiv e-prints. – 2021. – С. arXiv: 2106.06158.

## МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ КОЛОНИЙ БАКТЕРИЙ НА МИКРОБИОЛОГИЧЕСКИХ ФОТОИЗОБРАЖЕНИЯХ

Машечкин И.В.<sup>1</sup>, Попов И.С.<sup>2</sup>, Казачук М.А.<sup>3</sup>, Фазылов Р.Р.<sup>4</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ,  
e-mail: mash@cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ,  
e-mail: ivan@jaffar.cs.msu.ru

3) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ,  
e-mail: mkazachuk@cs.msu.ru

4) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ,  
e-mail: ramazankrow@gmail.com

Оперативное обнаружение в организме человека вредоносных бактерий является крайне важной на сегодняшний день задачей. В медицине принято решать данную задачу с помощью засева фрагментов биоматериала человека в чашку Петри с питательной средой. После засева происходит наблюдение за данной чашкой и дальнейший анализ выросших колоний бактерий на масс-спектрометре. К данной задаче привлекается научный персонал лаборатории: от простых лаборантов до высококвалифицированных специалистов. Кроме того, что такой подход требует большого количества ценного времени, также не исключены ошибки, связанные с человеческим фактором. Поэтому появляется необходимость автоматизации данного процесса с помощью применения методов машинного обучения и компьютерного зрения, способных решать задачи сегментации изображений чашек Петри и распознавания в них колоний бактерий.

В работе было проведено исследование существующих современных методов [1, 2, 3, 4] обнаружения колоний бактерий на фотоизображениях. В частности, было выявлено, что качество таких методов при смене наборов данных для исследования недостаточно высокое, чтобы они могли быть использованными на практике.

Авторами данной работы был предложен собственный эвристический метод сегментации колоний бактерий, основанный на анализе гистограммы распределения пикселей. Предложенный метод обладает значительно более высокой точностью работы, составляющей порядка 80%, и может использоваться для автоматизации работ медицинских лабораторий. Дальнейшим этапом исследований является разработка алгоритмов классификации найденных бактерий.

### Литература

1. Shamash M., Maurice C. F. OnePetri: accelerating common bacteriophage Petri dish assays with computer vision // PHAGE. – 2021. – Т. 2. – №. 4. – С. 224-231.
2. Torelli A. et al. AutoCellSeg: robust automatic colony forming unit (CFU)/cell analysis using adaptive image segmentation and easy-to-use post-editing techniques // Scientific reports. – 2018. – Т. 8. – №. 1. – С. 1-10.
3. Girshick R. et al. Rich feature hierarchies for accurate object detection and semantic segmentation // Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition. – 2014. – С. 580-587.
4. Shaily T., Kala S. Bacterial image classification using convolutional neural networks //2020 IEEE 17th India Council International Conference (INDICON). – IEEE, 2020. – С. 1-6.

# МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ БАКТЕРИАЛЬНОЙ РЕЗИСТЕНТНОСТИ К АНТИБИОТИКАМ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА МИКРОБИОЛОГИЧЕСКИХ ФОТОИЗОБРАЖЕНИЙ

Машечкин И.В.<sup>1</sup>, Попов И.С.<sup>2</sup>, Казачук М.А.<sup>3</sup>, Трапезников М.Ю.<sup>4</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ,  
e-mail: mash@cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ,  
e-mail: ivan@jaffar.cs.msu.su

3) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ,  
e-mail: mkazachuk@cs.msu.ru

4) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ,  
e-mail: trapeznikovmisha@mail.ru

Одной из наиболее актуальных задач клинической фармакологии является задача своевременного лечения инфекционных заболеваний, вызванных различными бактериями. Зарекомендовавшим себя методом подбора рабочих схем лечения является способ определения антибиотикорезистентности, основанный на так называемом диско-диффузном методе – визуальной оценке радиусов ореолов, возникающих в чашке Петри вокруг дисков с антибиотиками, которые были помещены в специальную питательную среду, содержащую штамм обнаруженного у пациента микроорганизма.

Целью данной работы является исследование существующих [1, 2, 3] и разработка собственных алгоритмов определения бактериальной резистентности к антибиотикам на основе анализа микробиологических фотоизображений, показывающих высокое качество работы и способных применяться на практике.

В работе предлагаются способы специальной предобработки изображений; обнаружения дисков с антибиотиками – на основе градиентного алгоритма Canny и преобразования Хаффа; распознавания надписей и дозы на антибиотиках – модификация перспективного нейросетевого метода [1]; автоматического измерения диаметра ореола резистентности – на основе вычисления средних значений яркостей пикселей предобработанного изображения. Анализируются достоинства и недостатки различных подходов. Предлагается собственный алгоритм определения одного из видов дефектных изображений – контаминированных проб, обладающий высоким качеством работы.

Итоговые значения точности работы комбинации предложенных алгоритмов достигли показателей ассигасы = 94%, roc\_auc = 90%.

## Литература

1. Pascucci, M., Royer, G., Adamek, J. et al. AI-based mobile application to fight antibiotic resistance. *Nat Commun* 12, 1173 (2021). URL: <https://doi.org/10.1038/s41467-021-21187-3>.
2. B. Keerthi Priya, D. Akhila Reddy, A. Daisy Rani et al. Automatic Inhibition Zone Diameter Measurement for Disc Diffusion Test Using Image Segmentation // In: 2021 IETE Journal of Research. URL: <https://doi.org/10.1080/03772063.2021.1969293>.
3. C.A. Alonso, C. Domínguez, J. Heras, E. Mata, V. Pascual, C. Torres, M. Zarazaga, Antibioqramj: A tool for analysing images from disk diffusion tests, *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, Volume 143, 2017, Pages 159-169, ISSN 0169-2607, URL: <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2017.03.010>.

# МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ СОБЫТИЙ В ДАННЫХ СИСТЕМНЫХ ЖУРНАЛОВ

Горохов О.Е.<sup>1</sup>, Петровский М.И.<sup>2</sup>, Машечкин И.В.<sup>3</sup>, Кирсанова С.И.<sup>4</sup>

1) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ,  
e-mail: gorokhov-oe@cs.msu.ru

2) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ,  
e-mail: michael@cs.msu.ru

3) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ,  
e-mail: mash@cs.msu.ru

4) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ,  
e-mail: kirsanova.sofya@gmail.com

В последнее время значительно растёт важность крупномасштабных программных комплексов. Такие системы позволяют хранить и обрабатывать большие объёмы данных и позволяют решать широкий спектр различных задач. Кроме того, крупные системы регулярно взаимодействуют с большим количеством пользователей, и даже небольшая ошибка в отдельной подсистеме может привести к серьёзным последствиям. Поэтому актуальной является задача своевременного обнаружения аномального поведения системы, а также определение причин такого поведения. Большинство современных систем позволяют хранить информацию о своей деятельности в специальных журналах логов, которые и используются экспертами для обнаружения причин аномального поведения систем. Анализ таких журналов и посвящена данная работа.

Анализ существующих работ показывает, что в последнее время эффективными в задаче анализа журналов являются подходы, основанные на процессной аналитике [1]. Стоит отметить также, что данные системных журналов представляют собой последовательность текстовых данных, поэтому задача выявления причин аномального поведения систем сводится к задаче обнаружения аномалий в текстовых данных [2].

На данный момент в задаче обнаружения критических событий используются критические подходы, основанные на тематическом моделировании. Однако, они не позволяют добиться хороших результатов.

Наиболее эффективными при анализе текстовых данных являются методы, основанные на глубинном обучении [3]. Поэтому в данной работе предлагается рассмотреть алгоритм, основанный на архитектуре свёрточной нейронной сети, применяемой к кластерам данных, полученным в результате процессной аналитики.

Для экспериментальной оценки предлагаемого подхода было произведено сравнение с классическими методами (NMF, LDA, kNN), которое показало, что предложенный подход позволяет добиться лучших результатов.

## Литература

1. Augusto A. et al. Automated discovery of process models from event logs: review and benchmark //IEEE transactions on knowledge and data engineering. – 2018. – V. 31. – №. 4. – P. 686-705.
2. Chandola V., Banerjee A., Kumar V. Anomaly Detection: A Survey //ACM Computing Surveys (2009) 41, No3, p.15:1–15:58.
3. Gorokhov O., Petrovskiy M., Mashechkin I. Convolutional Neural Networks for Unsupervised Anomaly Detection in Text Data //Lecture Notes in Computer Science (2017) 10585, p.500-507.

# ИССЛЕДОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ ОБНАРУЖЕНИЯ ОБЪЕКТОВ НА СПУТНИКОВЫХ СНИМКАХ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

Захаров В.О.<sup>1</sup>, Попов И.С.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ,  
e-mail: zolodya@mail.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ,  
e-mail: ivan@jaffar.cs.msu.su

Спутниковые снимки высокого разрешения охватывают обширную территорию поверхности Земли и содержат большие массивы информации. Ручная обработка снимков с целью обнаружения объектов определенного класса является чрезвычайно трудоемкой работой, поэтому для эффективного анализа большого объема данных требуются методы автоматического обнаружения объектов. Обработкой спутниковых снимков занимаются исследователи по всему миру, например, в рамках открытых соревнований DOTA[3], а также в научных работах по обнаружению самолетов на спутниковых снимках и аэрофотоснимках[1][2].

В исследованиях, указанных выше, работы ведутся со снимками, сделанными при благоприятных погодных условиях. В действительности, приходится оперировать снимками, в которых присутствует облачность, повышенная влажность и аномальное атмосферное давление, что в комплексе делает невозможным получение высокого качества снимков. Указанные факторы выходят за рамки применимости теоретических моделей и делают их непригодными для комплексного автоматического анализа.

Настоящее исследование посвящено разработке алгоритма обнаружения самолетов на спутниковых снимках поверхности Земли, устойчивого к неблагоприятным метеоусловиям. Решение данной задачи актуально для практического применения.

Для исследования использовались нейросетевые алгоритмы: семейство моделей Region Based Convolutional Neural Networks (RCNN), семейство моделей You Only Look Once (YOLO) и Single Shot Multibox Detector (SSD). Улучшение качества работы моделей достигнуто посредством сбора проприетарного набора данных и аугментации данных, соответствующих определенным метеоусловиям.

Итогом проведенных исследований является экспериментальная модель обнаружения самолетов на спутниковых снимках поверхности Земли, результат работы которой незначительно зависит от качества входных данных.

## Литература

1. Li W. et al. Robust airplane detection in satellite images //2011 18th IEEE International Conference on Image Processing. – IEEE, 2011. – С. 2821-2824.
2. Hsieh J. W. et al. Aircraft type recognition in satellite images //IEE Proceedings-Vision, Image and Signal Processing. – 2005. – Т. 152. – №. 3. – С. 307-315.
3. <https://captain-whu.github.io/DOTA/dataset>.

# ПРИМЕНЕНИЕ ОБУЧЕНИЯ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ В СИСТЕМЕ ОПТИМИЗАЦИИ МАРШРУТОВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ВИДА ВРЕМЕННЫХ ОКОН И ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ

Сорока А.Г.<sup>1</sup>, Мещеряков А.В.<sup>2</sup>, Герасимов С.В.<sup>3</sup>

1) *Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: soroka\_irk@mail.ru*

2) *Институт космических исследований РАН, e-mail: mesch@cosmos.ru*

3) *Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: sergun@gmail.com*

Задача построения и оптимизации маршрутов представляет собой класс задач комбинаторной оптимизации с многочисленными практическими применениями: курьерская доставка, работа такси, логистика товаров между складами и точками продаж. Существуют инструменты, позволяющие получить субоптимальное решение для классической постановки задачи ограниченного размера (например “Google OR-Tools”). Однако, для больших задач (>500 точек) и динамических задач, в которых новые точки, требующие быстрого пересчета пути, появляются по ходу выполнения маршрута, не было предложено эффективных полиномиальных алгоритмов.

В прикладных областях возникают дополнительные ограничения: временные окна доступности клиентов, ограничение на последовательность посещения, ограничения вместимости грузовых средств. Классические подходы для решения подобных задач делятся на два вида: поиск точных решений при помощи целочисленного программирования и эвристические подходы [1]. Точные решения часто разрабатываются на основе метода ветвей и границ, который имеет теоретическую гарантию нахождения оптимального решения, но неприменим для реальных задач из-за экспоненциальной сложности. На практике эвристика лучший выбор: несмотря на отсутствие теоретической гарантии качества, субоптимальное решение может быть получено за адекватное время. Однако разработка эвристики требует большого количества проб и ошибок, а производительность с точки зрения качества решения во многом зависит от интуиции и опыта людей-экспертов.

Решение для задачи построения маршрута представляет собой последовательность узлов (местоположение клиентов и складов). Глубокие модели обучения для обработки естественного языка, которые имеют дело с последовательностями, вероятно, являются идеальным выбором для обработки решений построения маршрутов. Именно поэтому в последнее время стали популярны нейронные подходы, основанные алгоритмах внимания для решения задачи оптимизации маршрутов с ограничениями [2][3].

Несмотря на то, что сегодня предложено множество алгоритмов решения задачи, не существует универсального пайплайна сравнения различных подходов: множество бейзлайнов, различные датасеты, меняющиеся ограничения. Такая система, способная быстро и качественно сравнивать различные алгоритмы для решения задачи оптимизации маршрутов, является важной ступенью для исследований и может быть крайне полезной. В данной работе мы расскажем о разработке нашей системы оптимизации маршрутов с ограничениями.

## Литература

1. Gutin G., Punnen A. P. (ed.). The traveling salesman problem and its variations. – Springer Science & Business Media, 2006. – Т. 12.
2. Falkner J. K., Schmidt-Thieme L. Learning to solve vehicle routing problems with time windows through joint attention //arXiv preprint arXiv:2006.09100. – 2020.
3. Lu H., Zhang X., Yang S. A learning-based iterative method for solving vehicle routing problems //International Conference on Learning Representations. – 2019.

# СРАВНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ЭВРИСТИЧЕСКИХ И ТОЧНЫХ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ МАРШРУТОВ В СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ VRP С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ГРУЗОПОДЪЕМНОСТЬ И ВРЕМЕННЫЕ ОКНА ДОСТАВКИ ТОВАРОВ

Михельсон Г.В.<sup>1</sup>, Мещеряков А.В.<sup>2</sup>, Герасимов С.В.<sup>3</sup>, Сорока А.Г.<sup>4</sup>

- 1) Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: 1069035F@mail.ru
- 2) Институт космических исследований РАН, e-mail: mesch@cosmos.ru
- 3) Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: sergun@gmail.com
- 4) Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: soroka\_irk@mail.ru

Проблема маршрутизации транспортных средств (**Vehicle Routing Problem**) – это класс задач комбинаторной оптимизации, суть которой в построении оптимального маршрута между депо и клиентами, зачастую с дополнительными ограничениями на: время доставки товара и время обслуживание клиента, вместимость транспортного средства и последовательность доставок. Цель задачи состоит в том, чтобы уменьшить некую заданную стоимость этого маршрута (пройденное расстояние, время или количество транспортных средств и т.п.).

Проблемы маршрутизации транспортных средств имеют большое практическое значение. Например, распределение заказов такси, все возможные логистические задачи распределения товаров и еще множество других. Сейчас существует множество открытых и коммерческих инструментов, способных решать задачу VRP, и при этом демонстрировать хорошие результаты, но на задачах небольшой размерности, а если и предоставляется решение, то спустя большой промежуток времени.

Существует несколько типов классических подходов для решения данной проблемы:

- *Эвристические алгоритмы*
  1. Конструктивные эвристики вычисляют единственный маршрут для рассматриваемой задачи и не улучшают его в дальнейшем.
  2. Метаэвристики позволяют находить близкие к оптимальным решениям, решения различных задач оптимизации за приемлемое время.
- *Точные алгоритмы* относятся к алгоритмам смешанного целочисленного программирования. Это задачи, в которых функция цели и ограничений являются линейными. Задачи линейного программирования хорошо изучены и известны их свойства с точки зрения существования решения.

В данной работе проводились исследования по сравнению эвристических алгоритмов “Simulated Annealing”[1], “2 Opt”, “3 Opt” и “LKH”[2] с коммерческим решателем “Gurobi”, базирующийся на решении задач: “Линейное программирование”, “Смешанное-целочисленное линейное программирование” и “Квадратичное программирование”, на наборах данных из 20, 50 и 100 точек. Рассмотрены ограничения на: вместимость транспортных средств и временные окна доставки.

## Литература

1. Czech, Z.J. and Czarnas, P., 2002, January. Parallel simulated annealing for the vehicle routing problem with time windows // Proceedings 10th Euromicro workshop on parallel, distributed and network-based processing (pp. 376-383). IEEE.
2. Helsgaun, K., 2000. An effective implementation of the Lin-Kernighan traveling salesman heuristic // European journal of operational research, 126(1), pp.106-130.

# НЕЙРОСЕТЕВЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА СКОПЛЕНИЙ ГАЛАКТИК В ДАННЫХ КОСМИЧЕСКОГО ОБЗОРА PLANCK

Немешаева А.А.<sup>1</sup>, Мещеряков А.В.<sup>2</sup>, Герасимов С.В.<sup>3</sup>

1) *Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: alisa.nemshaeva@gmail.com*

2) *Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: mesch@iki.rssi.ru*

3) *Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: sergun@gmail.com*

Скопления галактик играют важную роль в задачах определения параметров Вселенной и изучении эволюции галактик. Основными целями рентгеновского телескопа eROSITA являются обзор неба и поиск скоплений галактик. Скопления видимы не только в рентгеновском диапазоне, но и в оптическом и микроволновом. В микроволновом диапазоне скопления галактик проявляются благодаря эффекту Сюняева-Зельдовича. Основная цель этой работы - создание алгоритма, позволяющего извлечь из данных микроволнового диапазона наиболее полный и точный каталог кандидатов в скопления галактик в области неба обзора eROSITA.

Единственный на данный момент полный обзор неба в микроволновом диапазоне - Planck [1]. Для исследования этих данных использовались методы Matched Multi-Filter и PowellSnakes, на основе которых был получен каталог PSZ2 [2]. Этот каталог содержит сравнительно небольшое количество (1653) ярких скоплений, из которых подтверждены 1203, и многие другие объекты, которые можно наблюдать в данных Planck, остались неучтёнными в этом каталоге. В 2020 году вышла статья [3], авторы которой попробовали применить нейросетевую архитектуру U-net для сегментации карт Planck. Сами каталоги и карты сегментации опубликованы не были.

В основе алгоритма лежит нейросетевая архитектура U-net, а в качестве каталогов для формирования обучающей выборки выбраны каталоги PSZ2 и eROSITA. Мы добавили в алгоритм аналог активного обучения. Для обучения использовались данные двух приборов Planck - LFI и HFI. На их основе был создан каталог кандидатов скоплений галактик. Данные Planck хранятся в формате разбиения сферы HEALPix.

Для тестирования каталогов как и для дообучения использовался каталог eROSITA, который является наиболее полным каталогом скоплений.

Лучший каталог (без использования LFI каналов) на данный момент имеет Recall = 14.1% (по сравнению с 3.2% у PSZ2) на каталоге eROSITA. Каталоги с LFI достигают почти таких же значений, что и каталоги без LFI (но не превосходят их). Из этого можно сделать вывод о том, что само по себе добавление LFI каналов не улучшает качества каталога. В будущем планируется добавить дополнительные маски для сегментации других радио-источников (не скоплений), это должно улучшить качество каталога. Другие радио-источники обладают значительным излучением в каналах LFI, поэтому здесь уже присутствие LFI каналов будет иметь смысл.

По результатам работы получен наиболее полный каталог скоплений галактик и предложены методы поиска скоплений в данных Planck.

## Литература

1. Planck Collaboration, Planck 2018 results. III. High Frequency Instrument data processing and frequency maps. - SAO/NASA Astrophysics Data System - 2018 г.
2. Planck collaboration, Planck 2015 results. XXVII. The second Planck catalogue of Sunyaev-Zeldovich sources. - Astron. Astrophys. - 2015 г.
3. V. Bonjean, Deep learning for Sunyaev-Zel'dovich detection in Planck - Astronomy&Astrophysics - 2020 г.

# ПРИМЕНЕНИЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ КАРТЫ КРУПНОМАСШТАБНОЙ СТРУКТУРЫ ВСЕЛЕННОЙ ПО ДАННЫМ ОПТИЧЕСКИХ ОБЗОРОВ НЕБА

Васильев С.М.<sup>1</sup>, Мещеряков А.В.<sup>2</sup>, Герасимов С.В.<sup>3</sup>

- 1) Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: vsemenm@gmail.com
- 2) Институт космических исследований РАН, e-mail: mesch@cosmos.ru
- 3) Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: sergun@gmail.com

Крупномасштабная структура Вселенной на больших расстояниях (красных смещениях) состоит из квазаров (активных ядер далеких галактик), поэтому для построения карты структуры Вселенной необходимо иметь точные оценки красного смещения данных объектов. Существующие астрономические каталоги квазаров, такие как DR16Q, содержат значительное количество объектов, имеющих ошибочные спектроскопические оценки красных смещений. Наибольшее количество таких объектов находится на больших красных смещениях ( $Z > 3$ ). Целью настоящей работы является построение и оценка модели, позволяющей классифицировать квазары с ошибочными спектроскопическими оценками красного смещения.

Спектроскопическая оценка красного смещения вычисляется по линиям в снятом на телескоп спектре объекта. Фотометрическая оценка красного смещения производится на основе фотографий объекта в нескольких цветовых фильтрах. Спектроскопические и фотометрические данные - независимы. В работе [1] было выявлено по крайней мере 1900 квазаров из каталога DR16Q с ошибками в оценках красного смещения. Для классификации авторы статьи использовали спектры объектов. В данной работе мы используем фотометрические признаки и фотометрическую оценку красного смещения квазаров [2].

В качестве модели классификации был выбран градиентный бустинг, обученный на квазарах из каталогов DR14Q, VHzQ, и подвыборке каталога Superset.

Качество описанной модели оценивалось на двух тестовых наборах данных. Первый — является отложенной подвыборкой тренировочного набора данных. Второй — состоит из объектов DR14Q/VHzQ и найденных в работе [1] выбросов. Метрики построенной модели на описанных тестовых наборах данных равны соответственно:

1. Recall: 0.925, Precision: 0.952, 1 - FPR: 0.994.
2. Recall: 0.817, Precision: 0.993, 1 - FPR: 0.993.

В результате проделанной работы удалось выявить 1260 квазаров из каталога DR16Q на  $Z > 3$ , являющихся кандидатами на проверку существующей оценки красного смещения. Можно оценить, что ~1177 (93%) из них действительно содержат ошибки в спектральной оценке красного смещения. В работе [1] было выявлено 967 подобных объектов. При этом только 528 квазаров попали в обе выборки. Полученный набор выбросов был предложен эксперту к.ф.-м.н. Хорунжеву Георгию Андреевичу для частичной ручной разметки, в результате которой точность на  $3 < Z < 4$  и на  $Z > 4$  составила 50% и 94% соответственно.

## Литература.

1. Wu Q., Shen Y. A Catalog of Quasar Properties from Sloan Digital Sky Survey Data Release 16 //arXiv preprint arXiv:2209.03987. – 2022.
2. Borisov V. et al. Probabilistic photo-z machine learning models for X-ray sky surveys //arXiv preprint arXiv:2107.01891. – 2021.

# ПРИМЕНЕНИЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ О КОСМИЧЕСКИХ ТРАНЗИЕНТАХ

Борисов В.Д.<sup>1</sup>, Мещеряков А.В.<sup>2</sup>, Герасимов С.В.<sup>3</sup>

1) *Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: victor.d.borisov@gmail.com*

2) *Институт космических исследований РАН, e-mail: mesch@cosmos.ru*

3) *Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: sergun@gmail.com*

В декабре 2021 года орбитальная обсерватория «Спектр-Рентген-Гамма» [1] завершила двухлетний обзор всего неба в рентгеновских лучах. Обзор SRG/eRosita обнаружил несколько десятков тысяч рентгеновских транзиентов (астрономических источников с переменной яркостью) – переменных квазаров, событий приливного разрушения звезд сверхмассивными черными дырами, гамма-всплесков и др. Эти источники представляют большой интерес для науки. Для физического анализа транзиенты необходимо поместить на трехмерную карту Вселенной, для чего требуется измерять расстояние до них (космологическое красное смещение).

Методы измерения космологического красного смещения [2] разделяются на спектральные, где красное смещение измеряется напрямую из спектра источника, и фотометрические (photo-z), где красное смещение может быть опосредованно оценено для любого источника, имеющего детектирование на изображениях неба. Последние являются на порядок менее точными, однако представляют единственную возможность измерения красного смещения для десятков тысяч транзиентов, которые найдены в рамках обзора. Наиболее точными алгоритмами photo-z являются методы, основанные на моделях машинного обучения.

В рамках работы были построены модели photo-z рентгеновских источников на основе алгоритма случайного леса, предложенные в работе [3], и исследовался вопрос о применимости этих моделей для измерения красного смещения рентгеновских транзиентов (перенос обучения). Построенные модели photo-z были протестированы на выборке ~200 рентгеновских транзиентов, для которых измерено спектральное красное смещение. Прогнозы показали высокую точность по метрикам NMAD – 0,027 – и доля выбросов – 0,055. Таким образом, был получен метод, позволяющий построить трехмерную карту рентгеновских транзиентов, найденных в обзоре SRG/eRosita.

## Литература

1. Sunyaev, R., SRG X-ray orbital observatory. Its telescopes and first scientific results //Astronomy and Astrophysics, vol. 656, 2021. doi:10.1051/0004-6361/202141179.
2. M. Salvato, O. Ilbert, B. Hoyle. The many flavours of photometric redshifts //Nature Astronomy. 2019. Vol. 3, pp. 212–222
3. V. Borisov, A. Meshcheryakov, S. Gerasimov. Probabilistic Photo-z Machine Learning Models for X-ray Sky Surveys //ASTRONOMICAL DATA ANALYSIS SOFTWARE AND SYSTEMS XXX. 2022. Vol. 532, pp. 231–235

**Секция: «Математическая физика и обратные задачи»**

**СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
КОЭФФИЦИЕНТА И ИСТОЧНИКА В УРАВНЕНИИ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

Денисов А.М.

*МГУ имени М.В.Ломоносова, Факультет Вычислительной математики и кибернетики,  
кафедра математической физики, e-mail: den@cs.msu.ru*

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности, в котором коэффициент теплопроводности и одна из функций, входящих в источник, неизвестны. Ставится задача определения этих функций по дополнительной информации о решении начально-краевой задачи. Эта обратная задача сводится к системе нелинейных операторных уравнений относительно неизвестных функций. Доказывается теорема существования решения обратной задачи.

# О НОВЫХ ТИПАХ СТАЦИОНАРНЫХ И ДИНАМИЧЕСКИХ СТРУКТУР В МОДЕЛИ МАТРИЧНОЙ ФУРЬЕ-ФИЛЬТРАЦИИ

Разгулин А.В.<sup>1</sup>, Величкин М.С.<sup>2</sup>

1,2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической физики,  
e-mail: razgulin@cs.msu.ru

Фурье-фильтрация сигнала, состоящая в его изменении посредством воздействия на фурье-спектр, широко используется в задачах обработки информации с помощью нелинейных оптических систем с обратной связью [1]. Математические модели фильтров-мультипликаторов, воздействующих на каждую фурье-гармонику по отдельности, рассматривались в [2], [3]. В работах [4], [5] предложены новые модели матричной фурье-фильтрации, в которых преобразование фурье-спектра осуществляется его умножением на бесконечную матрицу фильтра. Соответствующая модель динамики фазовой модуляции  $u(x, t)$  описывается периодической краевой задачей для ФДУ диффузии в бесконечно тонком кольце ( $x \in [0, 2\pi]$ ):

$$\partial_t u + u - D \partial_{xx}^2 u = K |\Phi_{E+P}(\exp\{iu\})|^2, \quad (1)$$

где  $\Phi_{E+P}(f)$  — оператор матричной фурье-фильтрации, линейно преобразующий фурье-спектр функции  $f \in L_2(0, 2\pi)$ ,  $E$  — единичная матрица ( $\Phi_E(f) \equiv f$ ),  $P$  — матрица фильтра,  $D > 0$  — коэффициент диффузии,  $K > 0$ .

Важной прикладной задачей является построение решений (1) с наперед заданными свойствами с помощью подходящего выбора матричного фильтра. Данная задача решалась в [4] вариационным методом, а в [5] — методами теории бифуркаций Андронова-Хопфа. В докладе с единых позиций, основанных на применении теории бифуркаций Тьюринга и Андронова-Хопфа, предложена методика конструктивного построения матричных фурье-фильтров, с помощью которых в (1) возбуждаются устойчивые стационарные структуры и новые виды динамических структур с заданными свойствами. Аналитические исследования иллюстрируются результатами вычислительного эксперимента.

Работа первого автора выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение 075-15-2022-284).

## Литература

1. Larichev A.V., Nikolaev I.P., Violino P. LCLV-based system for high resolution wavefront correction: phase knife as a feedback intensity producer // Opt. Commun. 1997. Vol. 138. P. 127–135.
2. Потапов М.М., Чечкина К.А. Об одной модели амплитудно-фазовой фильтрации в нелинейной оптической системе с обратной связью // Вестн. моск. ун-та, сер. 15. ВМК. 1997. № 4. С. 31–36.
3. Разгулин А.В., Чушкин В.А. О задаче оптимальной фурье-фильтрации для одного класса моделей нелинейных оптических систем с обратной связью // ЖВМиМФ. 2004. Т. 44. №9. С. 1608–1618.
4. Razgulin A.V., Sazonova S.V. On the matrix Fourier filtering problem for a class of models of nonlinear optical systems with a feedback// Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017. Vol. 57. № 9. P. 1385–1403.
5. Razgulin A.V., Sazonova S.V. Hopf bifurcation in diffusive model of nonlinear optical system with matrix Fourier filtering // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2019. Vol. 77. P. 288–304.

# ОБ ЭФФЕКТЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ В МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ НЕСФЕРИЧЕСКОЙ МАГНИТОПЛАЗМОННОЙ НАНОЧАСТИЦЫ

Лопушенко В.В.<sup>1</sup>, Еремин Ю.А.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической физики,  
e-mail: lopushnk@cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической физики,  
e-mail: eremin@cs.msu.ru

Магнитоплазменные слоистые наночастицы, состоящие из магнитного ядра (Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub> или Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) и золотой оболочки, оказались весьма эффективным инструментом адресной доставки лекарств и терапии [1, 2] благодаря таким свойствам, как:

1. Возможность манипулирования такими частицами (за счет постоянного магнитного поля) с выбором нужного направления движения, контролем ориентации и концентрации, что существенно снижает потенциальный риск повреждения здоровых тканей.

2. Золотая оболочка защищает ядро от коррозии, обеспечивая биосовместимость с тканями живого организма, а наличие плазмонного резонанса в золотом слое дает дополнительные возможности для визуализации и лечения опухолей.

3. Изменением размера ядра, его материала, толщины оболочки и формы (вытянутости) частиц можно добиться попадания максимума энергии поглощения в окно прозрачности биологических тканей (диапазон 700–900 нм электромагнитного спектра), где поглощение окружающей биологической тканью минимально.

В данной работе на основе метода Дискретных источников исследуется влияние пространственной дисперсии, возникающей в тонкой золотой оболочке магнитоплазмонных частиц. Определяются условия, при которых максимум сечения поглощения попадает в окно прозрачности биологических тканей. В результате моделирования установлено [3], что учет пространственной дисперсии в оболочке приводит снижению амплитуды сечения поглощения до 30% и сдвигу максимума в коротковолновую область до 25 нм. Это обстоятельство необходимо учитывать для разработки оптимальной стратегии, основанной на применении магнитоплазмонных слоистых частиц при осуществлении фототермического нагрева онкологических образований с целью использования умеренных оптических мощностей и сбережения окружающих здоровых тканей.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00110, <https://rscf.ru/project/22-21-00110/>.

## Литература

1. Brennan G., Bergamino S., Pescio M., Tofail S.A.M., Silien C. The Effects of a Varied Gold Shell Thickness on Iron Oxide Nanoparticle Cores in Magnetic Manipulation, T1 and T2 MRI Contrasting, and Magnetic Hyperthermia //Nanomaterials (2020), **10**, No.12, p. 2424.
2. Tran H-V., Ngo N., Medhi R., Srinoi P., Liu T., Rittikulsittichai S., Lee T.R. Multifunctional Iron Oxide Magnetic Nanoparticles for Biomedical Applications: A Review //Materials (2022) **15**, No.2, p. 503.
3. Еремин Ю.А., Лопушенко В.В. Исследование эффекта пространственной дисперсии в металлической оболочке несферической магнитоплазмонной наночастицы //Оптика и спектроскопия (2022), **130**, вып.10, с.1596–1602.

## ИНДИКАТРИСА РАССЕЙЯНИЯ НА СОВОКУПНОСТИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Цыбров Е.Г.<sup>1</sup>, Головина С.Г.<sup>2</sup>, Никитин С.Ю.<sup>3</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра МФ,  
e-mail: tsybrovevgeniy@yandex.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра МФ,  
e-mail: sgolovina-msu@mail.ru

3) МГУ имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра ОФВП,  
e-mail: sergeynikitin007@yandex.ru

В системе кровообращения человека важную роль играют реологические свойства крови. К числу основных реологических параметров относят деформируемость и агрегационную способность эритроцитов. На реологию крови влияет и распределение эритроцитов по размерам [1]. О важности этого распределения говорит, в частности, тот факт, что ширина распределения эритроцитов по размерам является надежным предиктором смертности в общей популяции взрослых в возрасте 45 лет и старше [2].

В основе метода лазерной дифрактометрии лежит эффект рассеяния лазерного пучка на мазке крови, либо тонком слое суспензии эритроцитов. При таком рассеянии возникает картина, напоминающая картину дифракции света на круглом отверстии. Картина обладает осевой симметрией. Задача лазерной дифрактометрии заключается в определении параметров ансамбля эритроцитов на основе измерений характеристик дифракционной картины и анализа её индикатрисы рассеяния.

Известно, что угловой размер первого темного кольца на дифракционной картине определяет средний размер эритроцита на мазке крови. Видность этого кольца определяет разброс эритроцитов по размерам.

В настоящей работе развит алгоритм измерения параметров распределения эритроцитов по размерам на основе данных лазерной дифрактометрии мазка крови. Алгоритм предназначен для измерения среднего размера, а также ширины и асимметрии распределения эритроцитов по размерам. В частном случае бимодального ансамбля эритроцитов эти данные позволяют определить индивидуальный размер обеих компонент ансамбля, а также процентное соотношение между ними. Решение обратной задачи рассеяния представлено в виде явных аналитических выражений, пригодных для слабо неоднородных ансамблей эритроцитов. С математической точки зрения возможность аналитического решения обратной задачи рассеяния лазерного пучка на неоднородном ансамбле эритроцитов связана с использованием двух приближений. Во-первых, это полиномиальное представление функции Бесселя и функции Эйри, применимое для ограниченной части дифракционной картины, возникающей при рассеянии лазерного пучка на мазке крови. Во-вторых, приближение слабо неоднородного (по размерам) ансамбля эритроцитов.

### Литература

1. Атауллаханов Ф. И., Борсакова Д. В., Протасов Е. С., Синауридзе Е. И., Зейналов А. М. Эритроцит: мешок с гемоглобином или живая, активная клетка? Вопросы гематологии, онкологии и иммунопатологии в педиатрии, 2018, т. 17, № 1, с. 108–116.
2. Kushang V. P., Luigi F., Ershler W. B., Longo D. L., Guralnik J. M. Red Blood Cell Distribution Width and the Risk of Death in Middle-aged and Older Adults. Archives of Internal Medicine, 2009, v. 169, N 5, p. 515.

# ПРИМЕНЕНИЕ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ К ЗАДАЧЕ ОПТИЧЕСКОГО СЕКЦИОНИРОВАНИЯ ПОЛУПРОЗРАЧНОГО СЛОИСТОГО ОБЪЕКТА

Романенко Т.Е.<sup>1</sup>, Вострикова У.Ю.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической физики,  
e-mail: romanenko@cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической физики,  
e-mail: vostrikova.u.y@gmail.com

Задача восстановления трехмерных структур полупрозрачных объектов является актуальной в различных областях науки, в том числе при реконструкции и анализе биомедицинских данных при диагностике и лечении офтальмологических заболеваний. Один из перспективных методов получения таких данных для их дальнейшей диагностики основан на реконструкции трехмерной структуры глазного дна по набору изображений, полученных с помощью цифровой конфокальной биомикроскопии [1], который представляет собой стек изображений в каждой из фокальной плоскостей, где каждое изображение является композицией истинного сечения в выбранной фокальной плоскости и размытых изображений остальных сечений вкуче с абберрациями оптической системы глаза и искажениями светочувствительных сенсоров.

В данном случае изображение искомого трехмерного объекта описывается трехмерным уравнением свертки

$$i(x, y, z) = o(x, y, z) * h(x, y, z). \quad (1)$$

Здесь  $o(x, y, z)$  – искомый объект, слой которого нужно восстановить,  $i(x, y, z)$  – наблюдаемое изображение, а  $h(x, y, z)$  – трехмерная функция точечного источника (point spread function, PSF). Решение данной задачи затрудняется как ее некорректностью (в силу общих свойств функции  $h(x, y, z)$ ), так и тем, что функция  $h(x, y, z)$ , как правило, точно неизвестна из-за индивидуальных особенностей оптической системы глаза конкретного пациента. Наряду со спектральным методом [2] решения задачи трехмерной деконволюции перспективным является и применение к ее решению методов, основанных на использовании сверточных нейронных сетей [3].

В данной работе предлагается подход, основанный на использовании сверточной нейронной сети архитектуры типа U-Net [4], обученной на синтетически сгенерированных наборах данных, и ее применении к экспериментальным наборам данных.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

## Литература

1. Larichev A.V., Ivanov P.V., Iroshnikov N.G., Shmalhauzen V.I., Otten L.J. Adaptive system for eye-fundus imaging // Quantum Electronics. 2002. Vol. 32. P. 902-908.
2. А.В. Разгулин, Н.Г. Ирошников, А.В. Ларичев, С.Д. Павлов, and Т.Е. Романенко. Об одной задаче численного секционирования в офтальмологии. Компьютерная оптика, 39(5):777–786, 2015.
3. Xu, L. & Ren, Jimmy & Liu, C. & Jia, J.. (2014). Deep convolutional neural network for image deconvolution. Advances in Neural Information Proc. Systems. 2. 1790-1798.
4. Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation. In: Navab, N., Hornegger, J., Wells, W., Frangi, A. (eds) Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention – MICCAI 2015. MICCAI 2015. Lecture Notes in Computer Science(), vol 9351. Springer, Cham.

# САМО-КОМПЕНСАЦИЯ САМОФОКСИРОВКИ (САМОКОМПРЕССИИ) ОПТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ (ИМПУЛЬСОВ) В СРЕДЕ С КОМБИНИРОВАННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НА ОСНОВЕ КАСКАДНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ЭФФЕКТОВ

Федотов М.В.<sup>1</sup>, Харитонов Д.М.<sup>2</sup>, Трофимов В.А.<sup>3</sup>

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра МФ, fedotov@cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра МФ, dmitrykharitonov@cs.msu.ru

3) Южно-Китайский университет технологий, Гуанчжоу, Кунтай, trofimov@scut.edu.cn

Явления само-модуляции и кросс-модуляции, которые имеют место в средах с кубической нелинейностью, могут оказывать негативное влияние на процессы распространения волн в данных средах, в частности, снижать эффективность процессов преобразования частоты [1] или приводить к самофокусировке (самокомпрессии) оптических пучков (импульсов) с последующим пробоем нелинейной среды.

В то же время известно, что в средах с квадратичной нелинейностью большая расстройка волновых чисел волн основной частоты и удвоенной частоты приводит к проявлению эффектов, подобных эффектам, происходящим в кубической среде [2]. Нами показано в данном докладе, что при определенном подборе указанной расстройки действия каскадных квадратичных процессов и керровской нелинейности компенсируют друг друга, что демонстрируется для проблемы утроения частоты оптического излучения в среде с квадратичной и кубической нелинейностью.

Используя метод многих масштабов, из исходной системы трех нелинейных уравнений Шредингера, описывающих процесс взаимодействия волн основной частоты, второй и третьей гармоники, получена следующая система уравнений:

$$\frac{dU}{dz} + i\alpha(U^{*2}W + U(|U|^2 + 2|W|^2)) + i\frac{\gamma^2}{\Delta_{21}k}(-|U|^2U - 3U^{*2}W - 2U|W|^2) = 0,$$
$$\frac{dW}{dz} + 3i\alpha\left(\frac{1}{3}U^3 + W(2|U|^2 + |W|^2)\right) - 3i\frac{\gamma^2}{\Delta_{21}k}(U^3 + 2|U|^2W) + \Delta_{31}kW = 0.$$

Здесь  $U, W$  – комплексные амплитуды основной волны и волны на утроенной частоте,  $\gamma, \alpha$  – коэффициенты квадратичной и кубической нелинейности,  $\Delta_{j1}k, j = 2, 3$  – расстройки волновых чисел между волнами удвоенной и утроенной частоты и волны основной частоты. Анализ уравнений показывает, что при выполнении условия  $\alpha = \gamma^2/\Delta_{21}k$  происходит компенсация керровской нелинейности за счёт каскадных квадратичных процессов, и волна распространяется в нелинейном кристалле так, как бы она распространялась в линейной среде.

Другое использование каскадных процессов – расширение спектра волны третьей гармоники, что позволяет её сжать, а также увеличение эффективности преобразования частоты лазерного излучения.

Харитонов Д.М. благодарит Московский центр фундаментальной и прикладной математики (соглашение № 075-15-2022-284) за финансовую поддержку работы.

## Литература

1. Ditmire T. et al. Effects of cubic nonlinearity on frequency doubling of high-power laser pulses // JOSA B. (1996) **13**, №. 4. p. 649-655.
2. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П. Нелинейные взаимодействия дифрагирующих световых пучков с квадратичной нелинейностью. // Письма в ЖЭТФ. (1974) **20**, № 11, с. 339-343.

# НЕЙРОСЕТЕВОЙ МЕТОД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФИЛЬТРОВ ГАБОРА ДЛЯ АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ ВЕН ЛАДОНЕЙ

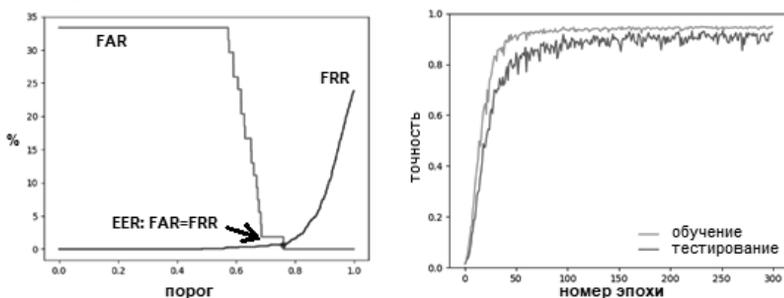
Трофимов Д.А., Павельева Е.А.

МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической физики,  
e-mail: fastaki14@gmail.com, paveljeva@cs.msu.ru

В работе предложен метод решения задачи идентификации человека по изображению вен ладони на основе сверточной нейронной сети с использованием фильтров Габора и функции потерь triplet loss.

Нейросетевые методы биометрической идентификации решают, как правило, задачу классификации с заранее известным количеством классов. В данной работе предполагается, что количество классов изображений неизвестно, и для пары изображений вен ладоней вычисляется расстояние между их векторами признаков, полученными на выходе нейросети. Минимизация функции потерь triplet loss при обучении приводит к уменьшению расстояний между изображениями одного класса и к увеличению расстояний между изображениями разных классов [1, 2]. Для улучшения результатов работы метода в работе используются свертки с функциями Габора на сверточных слоях нейронной сети [3]. Экспериментальные результаты демонстрируют эффективность предложенного метода. Получено значение величины Equal Error Rate EER=0,67%. Нейронная сеть обучалась с использованием предварительно обработанных изображений базы данных CASIA Multi-Spectral Palmprint Database [4].

На рисунке представлены графики зависимости ошибок I и II рода от порогового значения расстояния между изображениями, а также графики точности предсказания нейронной сети на наборах данных для обучения и тестирования в зависимости от номера эпохи.



## Литература

1. Dong X., Shen J. Triplet loss in siamese network for object tracking // Proceedings of the European conference on computer vision (ECCV). – 2018. – Pp. 459-474.
2. Trofimov D. A., Pavelyeva E. A. Palm vein identification based on vein segmentation and triplet loss function // CEUR Workshop Proceedings. — 2021. — Vol. 3027. — Pp. 542–548.
3. Luan S., Chen C., Zhang B., Han J., Liu J. Gabor convolutional networks // IEEE Transactions on Image Processing. – 2018. – Vol. 27. – no. 9. – Pp. 4357-4366.
4. CASIA Iris Image Database Version 4.0 and CASIA Multi-Spectral Palmprint Database. <http://biometrics.idealtest.org>

# УЧЁТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В МЕТОДЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ МТЗ

Барашков И.С.<sup>1</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической физики,  
e-mail: barashkov@cs.msu.ru

В настоящей работе рассмотрено математическое моделирование электромагнитного поля в неоднородной среде с помощью метода интегральных уравнений. Подробно изучен случай контрастных проводящих сред, когда проводящая неоднородность находится в плохо проводящей среде.

Эффект контрастности среды наиболее сильно проявляется в случае Н-поляризованного двумерного электромагнитного поля в неоднородной среде. Поэтому численный эксперимент проводится именно для этого случая для модели грабена. Анализ численного решения интегрального уравнения в этом случае показал, что решение имеет плохую точность, когда в области неоднородности используется традиционная равномерная прямоугольная сетка, а узлы, в которых вычисляется электрическое поле, традиционно расположены в центре ячеек сетки. При этом ничего не делается для детализации поведения поля на границах неоднородности в надежде на то, что граничные условия будут учитываться сами собой автоматически. Не помогает даже использование метода повышенной фоновой проводимости, предложенного в работе [1].

Трудность учёта граничных условий при традиционном расположении узлов сетки заключается в том, что узлы не попадают на границы разрыва проводимости среды, на которых должны выполняться граничные условия.

Значительно более хороший результат был получен при совместном использовании метода повышенной фоновой проводимости и специальной сетки с узлами, расположенными как традиционным образом, так и на границе разрыва проводимости среды. Разработано специальное интегральное уравнение для токов, текущих через границы разрыва проводимости среды и построено ядро этого интегрального уравнения.

В настоящей работе выполнено сравнение решения, посчитанного с помощью интегрального уравнения для токов и решения посчитанного с помощью конечно разностного метода. Получено очень хорошее совпадение результатов двух методов

## Литература

1. Дмитриев В.И. Об использовании метода интегральных уравнений в низкочастотной электродинамике неоднородных контрастных сред //Труды «Прикладная математика и информатика» – 2017. – №54, с.50-56.

## ПРИСОЕДИНЕННЫЕ РЕШЕНИЯ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Тихонов И.В.<sup>1</sup>, Алмохамед М.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической физики,  
e-mail: ivtikh@mail.ru

2) МТУСИ, Информационные технологии, кафедра математического анализа;  
Университет Алеппо, Естественные науки, Математика (Сирия),  
e-mail: mssrmtz@gmail.com

В теории неклассических задач для эволюционных дифференциальных уравнений есть много результатов общего плана, выражающих единственность решения той или иной изучаемой задачи в терминах распределения нулей соответствующей характеристической целой функции (см., например, [1]). С указанными нулями связаны так называемые *элементарные решения* линейной однородной задачи, дающие для нее простые примеры неединственности. Иногда нули могут оказаться кратными, и тогда в задаче помимо элементарных решений возникают дополнительные *присоединенные решения*, представляющие самостоятельный интерес на практике. Отмеченный эффект подробно исследован в недавней работе [2] (см. также [3, 4]) в случае модельной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка. Помимо общей теории построены конкретные примеры обратных задач, имеющих присоединенные решения — существенную роль здесь сыграло одно соображение В. А. Ильина [5].

В докладе будут представлены результаты работы [2].

### Литература

1. Тихонов И. В., Алмохамед М. Обратная задача с переопределением третьего рода для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 7. С. 890–911.
2. Алмохамед М., Тихонов И. В. Примеры присоединенных решений в линейных обратных задачах // Челябинский физико-математический журнал. 2022. Т. 7. Вып. 4. (В печати.)
3. Алмохамед М., Тихонов И. В. О некоторых спектральных исследованиях, связанных с теорией обратных задач // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й международной Саратовской зимней школы. Саратов: Саратовский университет, 2022. С. 20–26.
4. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Алмохамед М. О некоторых трансцендентных уравнениях, важных для математической физики // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й международной Саратовской зимней школы. Саратов: Саратовский университет, 2022. С. 294–299.
5. Ильин В. А. О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Труды МИАН СССР. 1976. Т. 142. С. 148–155.

**О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ НАКОПИТЕЛЯ ДЛЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ**

Васин А.А.<sup>1</sup>, Григорьева О.М.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Исследования операций,  
e-mail: vasin@cs.msu.su

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Исследования операций,  
e-mail: olesyagrigez@gmail.com

Развитие электроэнергетики является важной задачей с точки зрения ускорения темпов роста российской экономики. Ее решение связано с использованием новых экономических и технических инструментов для оптимизации производства и потребления электроэнергии (возобновляемые источники энергии и накопители электрической мощности). Для минимизации своих расходов потребитель может использовать возобновляемые источники энергии (например, солнечные батареи). Но поставляемый ими объем мощности является случайной величиной, зависящей от погодных условий. В этой ситуации полезную роль может сыграть накопитель энергии: потребитель накапливает в нем энергию при низких ценах и использует ее при высоких ценах в тех периодах, когда у него большая потребность в энергии.

В работе [1] исследуются преимущества ресурсов гибкого спроса в микросетях для оптимальной торговли энергией на рынках энергии на сутки вперед и в режиме реального времени. В качестве ресурсов с гибким спросом рассматриваются электромобили и аккумуляторы. Предлагается эвристический метод двухэтапной оптимизации сети. В работе [2] рассматривается мульти-энергетическая микросеть с использованием ветровой и солнечной энергии и нагрузками по электричеству, теплу и газу. Обсуждается оптимальное использование накопителей в такой сети. В статье [3] рассматриваются разные типы существующих систем накопления энергии, обсуждаются их характеристики и тенденции их развития.

В настоящей работе рассматривается задача оптимизации параметров накопителя для небольшого потребителя, действия которого не влияют на рыночные цены электроэнергии. Обсуждается случай, когда управление накопителем основано на достоверном прогнозе случайных факторов для интервала планирования, а затем - соответствующая задача стохастической оптимизации, в которой будущие значения случайных факторов характеризуются вероятностным распределением. Указывается оптимальная стратегия для рынка, где потребитель может продать избыточную энергию по текущей рыночной цене. Рассматривается задача выбора оптимальных параметров накопителя - емкости, скорости зарядки и разрядки – с точки зрения полезности потребителя.

**Литература**

1. Eseye A. T., Lehtonen M., Tukia T., Uimonen S., Millar R. J. Optimal Energy Trading for Renewable Energy Integrated Building Microgrids Containing Electric Vehicles and Energy Storage Batteries // IEEE Access (2019)7, p.106092–106101.
2. Shen Y., Hu W., Liu M., Yang F., Kong X. Energy storage optimization method for microgrid considering multi-energy coupling demand response // Journal of Energy Storage. – 2022. – V.45.
3. Nadeem F., Suhail Hussain S. M. and others. Comparative review of energy storage systems, their roles, and impacts on future power systems. // IEEE Access (2018)7 p.4555– 4585.

# О КЛАССИФИКАЦИИ ДВУХКРИТЕРИАЛЬНЫХ МАТРИЧНЫХ ИГР 2Х2

Поспелова И.И.<sup>1</sup>, Сат С.О.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра исследования операций,  
e-mail: ipospelova05@yandex.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра исследования операций,  
e-mail: sanwiwla@gmail.com

Работа посвящена исследованию двухкритериальных матричных игр 2х2 двух лиц с нулевой суммой  $\langle I, J, (A^1, A^2) \rangle$ , где  $I = \{1, 2\}$ ,  $J = \{1, 2\}$  – множества стратегий 1-го и 2-го игрока, соответственно, а  $(A^1, A^2)$  – заданная в матричном виде вектор-функция выигрыша 1-го игрока и проигрыша 2-го,  $A^k = (a^k_{ij})$ ,  $i, j, k = 1, 2$ .

Согласно [1] решение двухкритериальной игры в смешанных стратегиях находится с помощью линейной свертки [2], приводящей исходную игру к параметрическому семейству скалярных игр

$$\Gamma = \langle P, Q, EL_I(p, q, \lambda), EL_{II}(p, q, \eta) \rangle. \quad (1)$$

Здесь  $P = [0, 1]$  и  $Q = [0, 1]$  определяют смешанные стратегии вида  $(p, 1 - p)$  и  $(q, 1 - q)$  для 1-го и 2-го игрока, соответственно,  $\lambda \in [0, 1]$  и  $\eta \in [0, 1]$  – параметры линейной свертки критериев для 1-го и 2-го игрока, соответственно,

$$EL_I(p, q, \lambda) = qL_I(p, 1, \lambda) + (1 - q)L_I(p, 2, \lambda),$$

$$EL_{II}(p, q, \eta) = pL_{II}(1, q, \eta) + (1 - p)L_{II}(2, q, \eta),$$

$$L_I(p, j, \lambda) = \lambda \bar{f}_1^I(p, j) + (1 - \lambda) \bar{f}_2^I(p, j), \quad L_{II}(i, q, \eta) = \eta \bar{f}_1^{II}(i, q) + (1 - \eta) \bar{f}_2^{II}(i, q),$$

$$\bar{f}_k^I(p, j) = pa^k_{1j} + (1 - p)a^k_{2j}, \quad \bar{f}_k^{II}(i, q) = qa^k_{i1} + (1 - q)a^k_{i2}, \quad i, j, k = 1, 2.$$

Решение семейства параметрических игр (1) существует при любых значениях параметров свертки [3] и находится аналитически.

Для рассматриваемой двухкритериальной матричной игры в [4] предложена классификация типов матриц в зависимости от формы множества достижимости. Для примеров матриц каждого типа из [4] были найдены множества равновесных исходов и построены соответствующие множества значений. Оказалось, что, во-первых, множества равновесных значений могут иметь одинаковый вид для матриц разных типов (например, единственная точка в критериальном пространстве), а во-вторых, могут принципиально меняться при повороте множества достижимости (транспонировании матриц), хотя классификация не предполагает в этом случае изменение типа. Таким образом, показано, что классификация [4] не может считаться полной с точки зрения множества равновесных значений функции выигрыша.

## Литература

1. Shapley L.S. Equilibrium points in games with vector payoffs // Naval Research Logistics Quarterly (1959) **6**, № 1, P. 57-61
2. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики // М.: МАКС Пресс – 2005.
3. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики // М.: Мир – 1985.  
Tanaki T., Higuchi M. Classification of matrix types for multicriteria two-person zero-sum matrix games // IFAC Proceedings Volumes (2000) **33**, Iss.16, P. 659-668

# СПЕЦИФИКА И ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ АНАЛИЗ АУКЦИОНА РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТОТ

Каплан В.С.

*МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: 213kap@gmail.com*

Целью данной работы является применение теории игр к изучению специфики проведения аукциона размещения частот с помощью закрытых аукционов первой и второй цены. Аукцион размещения частот проводится государством с некоторой периодичностью для распределения участков спектра электромагнитных волн среди различных структур, частных и государственных компаний и прочих заинтересованных лиц.

Рассмотрим аукцион как игру между покупателями. Каждый лот представляет из себя некоторый диапазон электромагнитных частот. Лоты бывают двух альтернативных типов:  $l$  (licensed) – участок спектра, правом пользования которым обладает только один игрок, и  $u$  (unlicensed) – участок спектра, предназначенный для совместного использования несколькими пользователями одновременно. Таким образом, лицензированным участком спектра может пользоваться только непосредственно игрок, который его выиграл. В то время как нелицензированным участком спектра могут пользоваться абсолютно все, но игрокам, которые нуждались в этом участке как в лицензированном, он будет уже не нужен, так как у них не будет необходимого им исключительного права на лот. Участок становится лицензированным или нет, в зависимости от того, игрок какого типа его выиграл.

Данный тип аукционов отличается от традиционных, описанных, к примеру, в [1], так как в нём для  $u$ -игроков не всегда выгодно побеждать в игре, потому что у них есть возможность получить лот бесплатно, если выиграет другой  $u$ -игрок. Например, согласно [2], поставщики беспроводных услуг (AT&T, Verizon, T-Mobile) используют спектр, предназначенный для лицензированного использования, для предоставления услуг мобильной беспроводной связи по подписке. Примером же  $u$ -игрока может быть аэропорт, кафе или любая другая организация, которая предлагает своим посетителям услугу бесплатного Wi-Fi.

Приведу формулу функции выигрыша для  $i$ -игрока  $i$  в аукционе первой цены, если  $x_1 \neq x_2 \neq x_3$  и  $v_i$  – ценность лота для  $i$ -го игрока:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} v_i - x_i, & \text{если } x_i > x_j \forall j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j, \\ v_i, & \text{если } x_j > x_k \forall k \in \{1, 2, 3\}, j \neq k, i, \text{ игрок } j - u\text{-игрок,} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В ходе исследования были рассмотрены варианты проведения аукциона размещения частот с помощью закрытых аукционов первой и второй цены для двух и трёх игроков и одного лота. Были найдены и изучены равновесные исходы при различных возможных условиях. Также были сделаны выводы касательно того, какой участник аукциона выигрывает в каком случае.

## Литература

1. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир. – 1985.  
Sharkey W.W., Beltran F., Bykowsky M.M. Comparing the ability of different auction mechanisms to efficiently designate spectrum between licensed and unlicensed use. // SSRN Electronic Journal. – 2013.

# О МОДЕЛИ КРУПНЫХ ЗАКУПОК АКТИВА НА ДИСКРЕТНОМ РЫНКЕ

Морозов В.В.

*МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра исследования операций,  
e-mail: vmorosov@mail.ru*

В [1,2] рассмотрена задача инвестора, осуществляющего крупную закупку актива на финансовом рынке. Пусть торги происходят в моменты времени  $t_n = n\Delta t$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $\Delta t = T/N$ . Цены актива  $F_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , образуют процесс случайного блуждания:  $F_n = F_{n-1} + \varepsilon_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , где  $\varepsilon_n$  – белый шум. Обозначим  $x_n$  объем актива, приобретаемого инвестором в момент  $t_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Ask-цена актива из-за влияния крупных закупок предполагается равной [1]

$$A_n = F_n + s/2 + \lambda \sum_{i=0}^{n-1} x_i + k \sum_{i=0}^{n-1} x_i e^{-\rho(n-i)\Delta t}, n = 1, \dots, N,$$

где  $F_n + s/2$  – ask-цена актива в отсутствии крупных закупок,  $\lambda \in [0, 1/q]$  – коэффициент влияния крупных закупок на ask-цену после восстановления рынка в результате выбытия части продавцов,  $q$  – постоянное предложение актива по ценам свыше ask-цены,  $k = 1/q - \lambda$  – коэффициент восстановления рынка с интенсивностью  $\rho \in [0, \infty]$ .

Пусть  $X_n$  – требуемый объем актива, а  $X_n = X_0 - \sum_{i=0}^{n-1} x_i$  – объем актива, который необходимо приобрести инвестору, начиная с момента  $t_n$ . В частности,  $X_N = x_N$ . Стратегия инвестора  $x = (x_0, x_1, \dots, x_N) \in X = \{x | \sum_{i=0}^N x_i = X_0, x_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, N\}$ .

Рассмотрим задачу минимизации средних затрат на приобретение актива

$$J_0 = \min_{x \in X} E_0 \sum_{n=0}^N (F_n + s/2 + \lambda(X_0 - X_n) + D_n + x_n/(2q))x_n, \quad (1)$$

где  $D_0 = 0$ ,  $D_n = k \sum_{i=0}^{n-1} x_i e^{-\rho(n-i)\Delta t}$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Обозначим  $J_n(X_n, F_n, D_n)$  минимум средних затрат инвестора, начиная с момента  $t_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . В [1] показано, что

$$J_n(X_n, F_n, D_n) = (F_n + s/2)X_n + \lambda X_0 X_n + \alpha_n X_n^2 + \beta_n X_n D_n + \gamma_n D_n^2, \quad (2)$$

где коэффициенты  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , связаны некоторыми рекуррентными соотношениями, а  $\alpha_N = 1/(2q) - \lambda$ ,  $\beta_N = 1$ ,  $\gamma_N = 0$ . Положим  $a = 1 - e^{-\rho\Delta t}$ ,  $b = 1 + e^{-\rho\Delta t}$ ,

$$c_n = ((N - n)a + b)^{-1}, \tilde{c}_n = ((N - n)a + 1)^{-1}, n = 0, 1, \dots, N.$$

**Утверждение 1.** Для коэффициентов функций  $J_n(X_n, F_n, D_n)$  в (2) справедливы формулы  $\alpha_n = (kbc_n - \lambda)/2$ ,  $\beta_n = bc_n$ ,  $\gamma_n = (bc_n - 1)/(2k)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ .

**Утверждение 2.** Оптимальная стратегия инвестора в задаче (1) равна

$$x_n^* = c_0 X_0, n = 0, N, x_n^* = ac_0 X_0, n = 1, \dots, N - 1.$$

**Утверждение 3.** Пусть  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  – некоторые объемы закупок, сделанные инвестором в моменты  $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ . Тогда найдется такое  $p \in \{n, n + 1, \dots, N - 1\}$ , что оптимальная стратегия инвестора, начиная с момента  $t_n$ , имеет вид

$$x_i(X_i, D_i) = \begin{cases} 0, & i = n, \dots, p - 1, \\ X_n c_n - D_n (1 - c_n)/k, & i = p, \\ X_{p+1} a \tilde{c}_{p+1}, & i = p + 1, \dots, N - 1, \\ X_{p+1} a \tilde{c}_{p+1}, & i = N. \end{cases}$$

## Литература

1. Obizhaeva A., Wang J. Optimal trading strategy and supply/demand dynamics// Journal of Financial markets (2013) **16**, №1, p. 1–32.
2. Bertsimas D., Lo A. Optimal control of execution costs// Journal of Financial markets (1998) **1**, №1, p. 1–50.

# УПРАВЛЕНИЕ ЛИКВИДНОСТЬЮ НА РАСПРЕДЕЛЕННЫХ РЫНКАХ С АВТОМАТИЧЕСКИМИ МАРКЕТ-МЕЙКЕРАМИ (АММ)

Валеев А.Р.<sup>1</sup>

*МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Исследования операций,  
e-mail: valeevlamir@gmail.com*

Децентрализованные финансы становятся все более популярными, блокчейн-решения призваны стать более эффективными, чем существующие рыночные инструменты традиционных финансов, и предоставить новые способы построения экономических моделей. Ликвидность — одна из главных проблем децентрализованной финансовой системы. Текущие реализации распределенных бирж используют дизайн Automated Market Makers (АММ) для решения этой проблемы [1]. Технология кардинально отличается от привычной orderbook модели, однако некоторые классические подходы к управлению ликвидностью могут быть использованные и на децентрализованных рынках.

Uniswap [2] - крупнейшая децентрализованная биржа цифровых валют. Uniswap позволяет поставщикам ликвидности распределять ликвидность по одному или нескольким закрытым интервалам цены актива. Пока цена актива остается в этом интервале, поставщик ликвидности получает вознаграждение пропорционально количеству выделенной ликвидности. Это создает проблему оптимального управления ликвидностью.

В докладе будет рассказано о различных моделях АММ протоколов, а также о задачах, с которыми сталкиваются поставщики ликвидности на конкретной бирже - Uniswap V3.

Также предлагается математическая формализация данной задачи, а также будет рассказано про различные классы стратегий [3], работающий по принципу АММ, которые мне удалось протестировать на исторических данных.

## Литература

1. Jiahua Xu, Krzysztof Paruch, Simon Cousaert, Yebo Feng - SoK: Decentralized Exchanges (DEX) with Automated Market Maker (AMM) Protocols, 2021
2. Hayden Adams, Noah Zinsmeister, Moody Salem, River Keefer, Dan Robinson - Uniswap v3 Core, 2021
3. Michael Neuder, Daniel J. Moroz, Rithvik Rao, David C. Parkes Strategic Liquidity Provision in Uniswap v3, 2021

# ОПТИМАЛЬНАЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ В НЕПРЕРЫВНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С КОРРЕЛИРУЕМЫМИ ШУМАМИ

Смирнов М.А., Белянкина Т.В.

*МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Исследования операций  
e-mail: smirnov.mihail.a@yandex.ru*

Широкий класс задач управления, навигации, связи, обработки наблюдений может быть сведен к следующей формальной схеме: по реализации на интервале времени  $[t_0, t]$  наблюдаемого случайного процесса  $\mathbf{z}(s)$ , где  $s \in [t_0, t]$ , нужно найти в момент времени  $\tau$  оценку  $\boldsymbol{\mu}(\tau, t)$  ненаблюдаемого случайного процесса  $\mathbf{x}(t)$ . В случае, когда момент оценивания  $\tau$  превосходит момент оценивания  $t$ , при этом  $\tau$  фиксирован, а  $t$  изменяется, тип оценивания называется обратной экстраполяцией.

В настоящей работе рассматриваются вывод основных уравнений прямой и обратной экстраполяции в условиях ненулевой корреляции между шумами; Поиск математического ожидания и дисперсии ненаблюдаемого процесса  $\mathbf{x}(t)$ , используя метод семинвариантной функции. Далее решается задача поиска дисперсии оптимальной экстраполяционной оценки  $\boldsymbol{\mu}(\tau, t)$  в частном случае для скалярного гаусовского марковского процесса Орнштейна-Уленбека, при котором  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{z}(t)$  определяются уравнениями  $\frac{dx(t)}{dt} = -ax + \dot{w}(t)$  и  $\frac{dz(t)}{dt} = -bx + \dot{v}(t)$ .

В заключение проводится исследование изменения отношения дисперсий в двух случаях коррелируемых и некоррелируемых шумов в зависимости от различных параметров процессов  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{z}(t)$ , таких как мощности сигналов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ; мощности шумов  $\mathbf{q}, \mathbf{r}$ ; момент оценивания  $\tau$  и коэффициент корреляции  $s$  между шумами.

Результаты работы показывают, что дисперсии оптимальных оценок  $\Gamma_{12}(\tau, t)$  и  $\Gamma_{22}(\tau, t)$  для задач прямой и обратной экстраполяции совпадают в частном случае процесса Орнштейна-Уленбека. При отдалении момента оценивания  $\tau$  от момента окончания наблюдений  $t$  значение отношения  $\alpha$  растет, приближаясь к единице (т.е. корреляция между шумами перестает играть роль). Так же можно сделать вывод, что мощность ненаблюдаемого процесса  $\mathbf{a}$  имеет наибольшее влияние на различие между дисперсиями обратной экстраполяции в двух случаях коррелируемых и некоррелируемых шумов, в сравнении с мощностью сигнала наблюдаемого процесса  $\mathbf{b}$  и интенсивностями шумов  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{r}$ . Тем не менее, с ростом каждого из этих параметров, различие дисперсий уменьшается.

## Литература

1. Демин Н.С. Теория оценивания и распознавания стохастических сигналов: Учебно-пособие / Н.С. Демин – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983.
2. Липцер Р.Ш. Статистика случайных процессов / Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев – М.:Наука, 1974
3. Сушко Т.В. Оценивание стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью: диссертация ... канд. ф.-м. наук: 05.13.16/ Сушко Татьяна Валерьевна. – Томск, 1997.

**Секция: «Асимптотические методы и дифференциальные уравнения  
с малым параметром»**

**СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ  
ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ЭФФЕКТА  
БАРЕТТИРОВАНИЯ**

Никитин А.Г.

*МГУ имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра математики,  
e-mail: a.nikitin@bk.ru*

Рассматривается стационарное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = F \left( u, \int_0^1 R(u(s)) ds, x \right),$$

где  $\varepsilon > 0$  – малый параметр, предложенное в [1] для описания эффекта барреттирования, с однородными краевыми условиями Неймана. В работе [2] было построено асимптотическое приближение нулевого порядка для решения соответствующего параболического уравнения с периодическими краевыми условиями. Методы исследования нелинейных нелокальных моделей реакция-диффузия-адвекция с пограничными и внутренними слоями, разработанные для подобных задач [3], позволяют получить асимптотическое приближение решения с остаточным членом произвольного порядка точности и обосновать асимптотическое решение.

**Литература**

1. Барелко В.В., Бейбутян В.М., Володин Ю.Е., Зельдович Я.Б. Тепловые волны и неоднородные стационарные состояния в системе Fe + H<sub>2</sub> В кн.: Автоволновые процессы в системах с диффузией // Горький: ИПФ АН СССР, 1981, с.135.
2. Волков В.Т. Асимптотика периодических режимов в системах с малой диффузией и теплопроводностью: диссертация на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук: 01.01.03. / МГУ им. М.В. Ломоносова. - Москва, 1990. - 148 с.
3. Нефедов Н.Н., Никитин А.Г. Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для решений типа ступеньки в сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнениях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. т. 41. №7, с. 1057–1066.

# «СУПЕРБЫСТРОЕ» РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛАСТОГРАФИИ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Леонов А.С.<sup>1</sup>, Нефедов Н.Н.<sup>2а</sup>, Шаров А.Н.<sup>2б</sup>, Ягола А.Г.<sup>2с</sup>

1) Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», кафедра высшей математики, e-mail: asleonov@mephi.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: <sup>а</sup> nefedov@phys.msu.ru, <sup>б</sup> scharov.aleksandr@physics.msu.ru, <sup>с</sup> yagola@physics.msu.ru

В последнее время для онкологической диагностики все чаще используют новые методы медицинской визуализации – *эластографию*. Методы основаны на различиях в механических характеристиках здоровых и опухолевых биологических тканей и позволяют найти распределения модулей упругости в ткани по ее смещениям в результате внешних сжатий. Тем самым выделяются подозрительные на онкологию области с повышенными значениями модулей упругости. Для такой диагностики в реальном времени требуется адекватная математическая модель исследуемой ткани и «быстрый» метод решения обратной задачи: «по смещениям найти модули упругости». Однако, для общепринятой трехмерной модели изучаемой ткани, как упругого тела, решение обратной задачи на среднем по характеристикам персональном компьютере (ПК) требует *десятков часов*. Для реальной диагностики это неприемлемо.

В докладе изучается схема *квазистатической эластографии* с моделью ткани как линейно-упругого слоя  $\Omega = R_x^1 \times R_y^1 \times [0, c] \subset R_{xyz}^3$ . Его граница  $z = 0$  закреплена, а граница  $z = c$  находится под давлением  $F_0 = const$ . Упругие свойства ткани задаются модулем Юнга  $E(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega$ , и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.495$ . Смещения ткани  $u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}), w(\mathbf{x})$  по осям  $Ox, Oy, Oz$  можно найти по данным модулям упругости из известной краевой задачи для системы уравнений в частных производных (см., например, [1]). Это составляет *прямую задачу*. *Обратная задача* заключается в нахождении распределения модуля Юнга  $E(\mathbf{x})$  по известным вертикальным смещениям ткани  $w(\mathbf{x})$ . Особенностью прямой задачи является фигурирующий в ней малый параметр  $\varepsilon = 0.5 - \nu \approx 0.005$ . Применяя для ее решения метод малого параметра с регулярными возмущениями, можно при определенных предположениях получить связь вертикальных смещений и модуля Юнга:  $w = F_0(1 + 2\varepsilon\nu^{-1}) \int_0^z E^{-1}(x, y, \zeta) d\zeta$ . Эта формула использована нами для приближенного решения обратной задачи.

На модельных примерах показано, что решение обратной задачи эластографии с помощью полученной формулы достаточно хорошо воспроизводит точное решение, несмотря на жесткие предположения, при которых эта формула выведена. Решение обратной задачи на ПК требует 20 – 25 миллисекунд для достаточно подробных сеток.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 18-11-00042).

## Литература

1. Leonov A.S, Sharov A.N, Yagola A.G. (2020) Solution of the three-dimensional inverse elastography problem for parametric classes of inclusions. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 29:8, 1055-1069, DOI: 10.1080/17415977.2020.1817006

# ДВУМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ: МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЕНИЙ В ВОДНОЙ СРЕДЕ

Быков А.А.<sup>1</sup>

*1) Московский Государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: abykovmsu@gmail.com*

Мы рассматриваем двумерную задачу распространения загрязнений в водной среде. Модель включает уравнение реакции-адвекции-диффузии в двумерной среде, в которой задано стационарное поле скоростей переноса вещества, коэффициент диффузии, функция генерации, описывающая плотность источников. Функция генерации имеет три корня, причем ее производная в крайних корнях положительна, а в среднем корне отрицательна. Таким образом, имеется три состояния равновесия, причем крайние устойчивы, а среднее неустойчиво. Предполагаем, что в любой точке рассматриваемой области функция генерации имеет нулевой баланс. В окрестности кривой, на которой концентрация проходит через средний уровень равновесия, образуется внутренний переходный слой (ВПС), внутри концентрация меняется от одного устойчивого уровня равновесия до другого устойчивого, пересекая неустойчивый. Вообще говоря, скорость дрейфа ВПС определяется величиной дисбаланса функции генерации, кривизной ВПС, градиентом уровней равновесия, скоростью адвекции. Известно, что в случае нулевого дисбаланса скорость дрейфа ВПС определяется кривизной, дисбалансом и адвекцией. Мы рассматриваем сначала случай нулевого градиента уровней равновесия. Граничные условия мы формируем таким образом, чтобы описать процесс прохождения фронта через отверстие в перегородке, разделяющей два водоема. Предполагаем, что имеется стационарный поток жидкости из одного водоема в другой, поток захватывает загрязняющие примеси и переносит их через отверстие. Скорость потока удовлетворяет уравнению неразрывности несжимаемой жидкости, мы рассчитываем поле скоростей методом конформного отображения с применением функции Жуковского. Предполагаем, что в начальный момент времени жидкость в одном из водоемов загрязнена, а в другом чиста. Поле концентрации в начале берем в форме сформированного ВПС, расположенного вдоль прямой линии, соединяющей края отверстия. После включения поля скоростей поток захватывает загрязненную жидкость и выносит через отверстие, причем направление дрейфа ВПС направлено в сторону локального центра кривизны линии ВПС. На небольших промежутках времени кривая ВПС соединяет границы отверстия и переносится вместе с потоком. Далее включается механизм дрейфа кривизны, причем скорость дрейфа возрастает при уменьшении радиуса кривизны. Далее возможны три варианта. Если скорость градиентного дрейфа достаточна для противодействия адвективному переносу, то возникает равновесное состояние искривленного слоя. Если скорость дрейфа недостаточна, то слой достигает состояния максимально возможной кривизны (соответствующей примерно форме полуокружности), далее радиус кривизны начинает возрастать и слой распространяется неограниченно в сторону принимающего (чистого) водоема. Наконец, возможна предельная конфигурация, при которой в точке с максимальной кривизной достигается максимально возможная скорость дрейфа, равная ровно скорости адвекции. Именно эта конфигурация является предметом нашего исследования. Мы выводим уравнение стационарного равновесного слоя, обосновываем устойчивость, приводим результаты численного решения.

# ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЯХ СОЛНЕЧНОГО ДИНАМО

Соколов Д.Д., Юшков Е.В., Серенкова А.Ю.

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет,  
кафедра математики, e-mail: yushkov.msu@mail.ru*

Проведенное нами исследование отталкивается от следующего замечательного факта. Период магнитной солнечной активности, известной как 11-летний солнечный цикл, практически совпадает с периодом обращения Юпитера. Этот факт неоднократно отмечался в литературе, так история вопроса, например, обсуждалась в недавно опубликованной работе [1] и в приведенных там исторических ссылках. Заманчивым кажется предположить причинную связь между этими явлениями, т.е. считать, что слабое периодическое влияние Юпитера является физической причиной солнечного цикла. В работе нами исследуются свойства такого нелинейного параметрического резонанса на примере работы маломодовой динамо-модели Паркера. Данная модель представляет из себя систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений и в простейшем приближении описывает процессы генерации и осцилляции крупномасштабных магнитных полей в звездных системах, и в частности, на Солнце. В отсутствие нелинейных эффектов подавления рассматриваемая задача, по аналогии с системой гармонических колебаний, допускает асимптотическое выделение кратных резонансных частот [2]. Однако несмотря на то, что на первый взгляд на этих частотах разумно ожидать усиления амплитуды и в нелинейном случае, мы демонстрируем, что при наличии нелинейных слагаемых поведение системы гораздо сложнее. В частности, на резонансных и малых частотах может наблюдаться не усиление, а резонансное подавление генерации, в то время как усиление происходит в непосредственной близости от этих частот. В работе обсуждаются причины такого поведения, а также возможность влияния параметрического резонанса на установление планетарных динамо-циклов и на мощность вспышек в двойных звездных системах.

## Литература

1. Obridko V.N., Katsova M.M., Sokoloff D.D. Solar and stellar activity cycles—no synchronization with exoplanets // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2022. – 516.1. P. 1251-1255.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 1. // М.: Наука. – 1988.

# ВНУТРЕННИЕ ПЕРЕХОДНЫЕ СЛОИ В ЗАДАЧЕ С НЕГЛАДКОЙ РЕАКЦИЕЙ

Никудин Е.И.<sup>1</sup>

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики,  
e-mail: nikulin@physics.msu.ru

Рассматривается уравнение реакция-диффузия с негладкой реакцией:

$$N_\varepsilon(u) := \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon a(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} - f(u, x, \varepsilon) = 0, \quad -1 < x < 1$$

$$u(\pm 1, \varepsilon) = g(\pm),$$

где  $\varepsilon > 0$  - малый параметр,

$$f(u, x, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(-)}(u, x, \varepsilon), & -1 \leq x \leq x_p, \\ f^{(+)}(u, x, \varepsilon), & x_p \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad -1 < x_p < 1$$

$$\frac{\partial f^{(-)}}{\partial x}(u, x_p, \varepsilon) \neq \frac{\partial f^{(+)}}{\partial x}(u, x_p, \varepsilon), \quad f^{(-)}(u, x_p, \varepsilon) = f^{(+)}(u, x_p, \varepsilon), \quad u \in I_u$$

где  $I_u$  - область изменения решения  $u(x)$ .

Будем предполагать выполненными следующие условия: **(A1)** Пусть  $f^{(\pm)}(u, x, \varepsilon)$  - достаточно гладкие  $T$ -периодические по  $t$  функции в рассматриваемой области определения. **(A2)** Пусть вырожденное уравнение  $f(u, x, 0) = 0$  имеет ровно три корня:  $\varphi^{(\pm)}(x)$ ,  $\varphi^{(0)}(x)$ :  $f_u(\varphi^{(\pm)}(x), x, 0) > 0$ ,  $f_u(\varphi^{(0)}(x), x, 0) < 0$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ . **(A3)**  $\int_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f(u, x, 0) du \equiv 0$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ . **(A4)** Уравнение  $K_1(p) = 0$  имеет корень  $p_0 \in (\varphi^{(-)}(x_p), \varphi^{(+)}(x_p))$ , причем  $K_1'(p_0) < 0$ . Здесь  $K_1(p)$  - известная функция, выражающаяся через входные данные исходной задачи. Кроме того, потребуется условие **(A5)** для разрешимости задач для функций пограничных слоев нулевого порядка вблизи  $x = \pm 1$ .

Показано существование устойчивых решений с внутренним переходным слоем в окрестности точки  $x = x_p$ . Построено асимптотическое приближение по малому параметру таких решений. Для доказательства использовались результаты, основанные на применении асимптотического метода дифференциальных неравенств.

Работа поддержана грантом РФФ 21-71-00070.

## Литература

1. С. V. Pao Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations // Springer Science Business Media. 1993
2. N. N. Nefedov, E. I. Nikulin, and A. O. Orlov. Contrast structures in the reaction-diffusion-advection problem in the case of a weak reaction discontinuity // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2022. — Vol. 29, no. 1. — P. 81–90.

# НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОМЕРНЫХ КОНТРАСТНЫХ СТРУКТУР ТИПА СТУПЕНЬКИ В СРЕДЕ С РАЗРЫВНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Нефедов Н.Н.<sup>1</sup>, Орлов А.О.<sup>2</sup>

1) МГУ, физический факультет, кафедра математики, email: nefedov@phys.msu.ru

2) МГУ, физический факультет, кафедра математики, email: orlov.andrey@physics.msu.ru

В докладе рассматриваются краевые задачи для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений реакция-диффузия и реакция-диффузия-адвекция, естественным образом возникающие при моделировании физических явлений и процессов на границе раздела двух сред с различными характеристиками:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = f(u, x, \varepsilon), x \in (-1, 1), u(\pm 1) = u(\pm) \quad (1)$$

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \varepsilon A(u, x, \varepsilon) \frac{du}{dx} = f(u, x, \varepsilon), x \in (-1, 1), u(\pm 1) = u(\pm) \quad (2)$$

Функции  $f(u, x, \varepsilon), A(u, x, \varepsilon)$  претерпевают разрыв первого рода в некоторой точке  $x_0 \in (-1, 1)$ .

Важным как в теории контрастных структур, так и в ее обширных приложениях является вопрос об устойчивости по Ляпунову контрастных структур как стационарных решений соответствующих параболических задач. В работе [1] для задачи (1) строится формальная асимптотика решения с внутренним переходным слоем и доказывается теорема существования с помощью метода согласования (сращения) асимптотических разложений, однако вопрос устойчивости остается открытым. Метод дифференциальных неравенств используется в статье [2] для доказательства асимптотической устойчивости по Ляпунову решения типа контрастной структуры в задаче (1).

В настоящей работе будут выявлены условия, при которых решение с внутренним переходным слоем в задаче (1) является неустойчивым. Доказательство неустойчивости основано на построении неупорядоченной пары верхнего и нижнего решений и применении следствия из теоремы Крейна–Рутмана. Также будет показано, что полученные для задачи (1) результаты несложным образом переносятся как на задачу (2), так и на другие одномерные задачи реакция-диффузия-адвекция с разрывными нелинейностями.

Работа поддержана грантом РФФИ 18-11-00042.

## Литература

1. Нефедов Н. Н., Ни М. К. Внутренние слои в одномерном уравнении реакция диффузия с разрывным реактивным членом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. (2015) **55**, №12, с. 61–71.
2. Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., Орлов А. О. Асимптотическая устойчивость стационарного решения с внутренним переходным слоем задачи реакция–диффузия с разрывным реактивным слагаемым // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. (2018) №6, с. 3–10.

# СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ФРОНТА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА АКТИВАТОР-ИНГИБИТОР

Самсонов Д.С.<sup>1</sup>, Левашова Н.Т.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра математики,  
e-mail: samsonov.ds17@physics.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра математики,  
e-mail: levashovant@physics.msu.ru

В работе рассматривается начально-краевая задача с малым параметром  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} &= f(u, v, x, \varepsilon), & \varepsilon^4 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial t} &= g(u, v, x, \varepsilon), & x \in (0, 1), t \in (0, T] \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=1} &= 0, & t \in (0, T] \\ u(x, 0, \varepsilon) &= u_{init}(x, \varepsilon), & v(x, 0, \varepsilon) &= v_{init}(x, \varepsilon), & x \in [0, 1] \end{aligned} \quad (1)$$

Задача рассматривается вместе с условиями квазимонотонности вида

$$f_v(u, v, x, 0) > 0, \quad g_u(u, v, x, 0) < 0.$$

Эти неравенства должны быть выполнены при любых  $x \in (0, 1)$  и для всех возможных значениях  $u$  и  $v$ . Такие условия квазимонотонности характерны для систем типа активатор-ингибитор.

В настоящей работе доказывается существование решения в виде движущегося фронта для системы (1) с помощью метода дифференциальных неравенств. Верхнее и нижнее решения строятся как модификации асимптотических приближений решений [1].

Алгоритм построения верхнего и нижнего решений является более сложным по сравнению с [2] из-за рассматриваемых условий квазимонотонности. В работе были получены достаточные условия существования решения системы (1).

Исследование проводилось при поддержке Российского научного фонда: проект 18-11-00042

## Литература

1. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. урн (1995) **31**, №7, с. 1077–1085.
2. Левашова Н. Т., Мельникова А. А. Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе параболических уравнений // Дифф. ур. (2015) **51**, № 3, с. 339–358.

# ПОСТРОЕНИЕ СЕМЕЙСТВ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПО ДВУМ ПАРАМЕТРАМ

Даник Ю.Э.<sup>1</sup>

1) Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Институт системного анализа РАН (ФИЦ ИУ РАН), e-mail: yuliadanik@gmail.com

Рассматривается слабонелинейная дискретная система управления с двумя положительными параметрами и квадратичным критерием качества

$$\begin{aligned}x(t+1) &= A(x, \varepsilon)x(t) + B(x, \mu)u(t) = \\ & (A_0 + \varepsilon A_1(x))x(t) + (B_0 + \mu B_1(x))x(t),\end{aligned}\quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^r, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < \mu \leq \mu_0, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

$$I(u) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} (x^T Q(x, \varepsilon, \mu)x + u^T R_0 u) \rightarrow \min, \quad Q(x, \varepsilon, \mu) > 0, \quad R_0 > 0. \quad (2)$$

Для построения параметрического синтеза управлений используется подход D-SDRE, заключающийся в решении соответствующего дискретного матричного алгебраического уравнения Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния. Строится асимптотическое разложение к решению уравнения Риккати следующего вида

$$\tilde{P}(x, \varepsilon, \mu) = \tilde{P}_0 + \varepsilon \tilde{P}_{10}(x) + \mu \tilde{P}_{01}(x) + \varepsilon^2 \tilde{P}_{20}(x) + \varepsilon \mu \tilde{P}_{11}(x) + \mu^2 \tilde{P}_{02}(x). \quad (3)$$

На основе этого регулярного ряда строится матричная одноточечная Падэ аппроксимация (ПА) по параметрам  $\varepsilon, \mu$ .

$$PA_{2|2|2}(x, \varepsilon, \mu) = \frac{M_0 + \varepsilon M_{10}(x) + \mu M_{01}(x) + \varepsilon^2 M_{20}(x) + \varepsilon \mu M_{11}(x) + \mu^2 M_{02}(x)}{E + \varepsilon N_{10}(x) + \mu N_{01}(x) + \varepsilon^2 N_{20}(x) + \varepsilon \mu N_{11}(x) + \mu^2 N_{02}(x)}. \quad (4)$$

Приводятся численные расчеты на сетке по параметрам, демонстрирующие, что построенный регулятор стабилизирует замкнутую систему. Полученные ПА регуляторы обладают интерполяционными и экстраполяционными свойствами, позволяют в ряде случаев повысить точность приближения по сравнению с регуляторами на основе регулярной асимптотики.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-11-00202.

## Литература

1. Danik Yu.E., Dmitriev M.G. Construction of parametric regulators for nonlinear control systems based on the Padé approximations of the matrix Riccati equation solution //IFAC-PapersOnLine (2018) **51**, p. 815–820.
2. Danik Yu. One D-SDRE regulator for weakly nonlinear discrete state dependent coefficients control systems //The 7th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CODIT 2020), p. 616–621.
3. Danik Yu., Dmitriev M. The construction of stabilizing regulators sets for nonlinear control systems with the help of Padé approximations //Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. Springer International. – 2021, p. 45–62.

# ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ С ДАННЫМИ О ПОЛОЖЕНИИ ФРОНТА РЕАКЦИИ

Горбачев А.В.<sup>1</sup>, Аргун Р.Л.<sup>1</sup>, Левашова Н.Т.<sup>1</sup>, Лукьяненко Д.В.<sup>1,2</sup>

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики,  
e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

2) Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Задачи для уравнений типа реакция-диффузия-адвекция возникают в газовой динамике, химической кинетике, нелинейной теории волн, медицине, экологии и других областях науки. Особенностью задач подобного типа является наличие разномасштабных процессов. Поэтому математические модели этих задач описываются нелинейными параболическими уравнениями с малым параметром при старшей производной. В связи с этим решения этих задач могут содержать узкие движущиеся фронты, которые разделяют пространство на две части: возмущённую часть, через которую фронт уже прошел, и невозмущённую часть. Фронт представляет собой область, в которой функция, описывающая какую-либо характеристику среды (температуру, плотность и т.д.), достаточно резко изменяется от значений функции, описывающей одно состояние среды (например, невозмущённую), к значению функции, описывающей другое состояние. В случае наличия малого параметра при старшей производной ширина такого фронта будет достаточно малой по отношению к размерам всей области. Как следствие, фронт реакции можно различить экспериментально.

Некоторые прикладные задачи для уравнений указанного типа требуют решения обратных задач по восстановлению какого-либо коэффициента, входящего в уравнение. Для постановки обратной задачи требуется дополнительная информация, обычно измеряемая в эксперименте. Часто в постановках обратных задач для уравнений в частных производных используют дополнительную информацию о решении на части границы области. Однако, одной из возможных постановок обратных задач для уравнений такого типа является постановка с дополнительной информацией о динамике движения фронта реакции. Дополнительные данные такого типа являются востребованными на практике, так как их наиболее просто наблюдать в эксперименте (как уже было сказано выше, фронт является легко различимой контрастной структурой).

В докладе будут обсуждаться некоторые особенности численного решения коэффициентных обратных задач для уравнений типа реакция-диффузия-адвекция с данными о положении фронта реакции.

## Литература

1. Argun R., Gorbachev A., Levashova N., Lukyanenko D. Inverse problem for an equation of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of a reaction front: features of the solution in the case of a nonlinear integral equation in a reduced statement // Mathematics. — 2021. — V. 9, n. 18. — P. 2342.
2. Levashova N., Gorbachev A., Argun R., Lukyanenko D. The problem of the non-uniqueness of the solution to the inverse problem of recovering the symmetric states of a bistable medium with data on the position of an autowave front // Symmetry. — 2021. — V. 13, n. 5. — P. 860.

# ВЕРХНЕЕ И НИЖНЕЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ФРОНТА В СРЕДЕ С РАЗРЫВНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Чунжук Е.А.<sup>1</sup>, Левашова Н.Т.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра математики,  
e-mail: chunzhukliz@yandex.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра математики,  
e-mail: levashovant@physics.msu.ru

Исследуется задача о распространении автоволны в слоистой среде. В модели используется уравнение автоволновой диффузии с кубической нелинейностью.

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = (u - \varphi^{(-)}(x))(u - q(x))(u - \varphi^{(+)}(x)), & -1 < x < 1, 0 < t \leq T, \\ u(x, 0, \varepsilon) = u_{init}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(-1, t, \varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0. \end{cases}$$

$$q(x) = \begin{cases} q_l(x), & -1 \leq x \leq x_0, & 0 < t < T; \\ q_r(x), & x_0 \leq x \leq 1, & 0 < t < T. \end{cases} \quad q_l(x_0) \neq q_r(x_0).$$

Где  $\varepsilon$  – малый параметр,  $x_0$  – положение разрыва,  $\hat{x}(t)$  – положение фронта. Считаем, что выполнены неравенства:

$$\frac{\varphi^{(-)}(x) + \varphi^{(+)}(x)}{2} < q_l(x) < \varphi^{(+)}(x), \quad -1 \leq x \leq x_0;$$

$$\varphi^{(-)}(x_0) < q_l(x_0) < q_r(x_0).$$

Эти условия обеспечивают прохождение автоволнового фронта через границу раздела сред и исключают существование стационарного решения вида фронта.

Асимптотическое приближение решения для случая  $\hat{x} < x_0$ :

$$U^l = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x) + L_0^{(-)}(\xi, t) + \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i \left( \bar{u}_i^{l(-)}(x) + L_i^{(-)}(\xi, t) + Q_i^{l(+)}(\xi_0) \right), & -1 \leq x \leq \hat{x}; \\ \varphi^{(+)}(x) + L_0^{(+)}(\xi, t) + \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i \left( \bar{u}_i^{l(+)}(x) + L_i^{(+)}(\xi, t) + Q_i^{l(+)}(\xi_0) \right), & \hat{x} \leq x \leq x_0; \end{cases}$$

$$U^r = \varphi^{(+)}(x) + R_0^{(+)}(\xi, t) + \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i \left( \bar{u}_i^{r(+)}(x) + R_i^{(+)}(\xi, t) + Q_i^{r(+)}(\xi_0) \right), \quad x_0 \leq x \leq 1.$$

Верхнее  $\hat{\beta}$  и нижнее  $\hat{\alpha}$  решения строятся как модификация  $U^l, U^r$ . Выпишем верхнее решение для случая  $\hat{x} < x_0$ :

$$\hat{\beta}^{l(\mp)} = \begin{cases} U_2^l(x, \bar{\xi}, \bar{\xi}_0, t, \varepsilon) + \varepsilon^2 \left( \mu + l^{(-)}(\bar{\xi}, t) + q^{l(+)}(\bar{\xi}_0) \right) + \varepsilon^2 e^{-\gamma \rho^{(-)}}, & -1 \leq x \leq \bar{x}; \\ U_2^l(x, \bar{\xi}, \bar{\xi}_0, t, \varepsilon) + \varepsilon^2 \left( \mu + l^{(+)}(\bar{\xi}, t) + q^{l(+)}(\bar{\xi}_0) \right) + \varepsilon^2 e^{+\gamma \rho^{(+)}}, & \bar{x} \leq x \leq x_0; \end{cases}$$

$$\hat{\beta}^{r(+)} = U_2^r(x, \bar{\xi}, \bar{\xi}_0, t, \varepsilon) + \varepsilon^2 \left( \mu + r^{(+)}(\bar{\xi}, t) + q^{r(+)}(\bar{\xi}_0) \right) + \varepsilon^2 e^{+\gamma \rho^{(+)}}, \quad x_0 \leq x \leq 1.$$

где  $\mu > 0$  – константа, функции  $r, l, q$  строятся так, чтобы выполнялись определения верхнего и нижнего решений [1].

Исследование проводилось при поддержке Российского научного фонда: проект 18-11-00042.

## Литература

1. Pao C.V. // Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York, 1992.

# КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ ДЛЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ПЕРИФЕРИЙНЫХ ОБЛАСТЯХ ГАЛАКТИКИ

Хасаева Т.Т., Михайлов Е.А.

*МГУ имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра математики,  
e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru*

В некоторых спиральных галактиках присутствует явление резкой смены направления силовых линий магнитного поля по мере удаления от центра галактического диска. Такое явление носит название инверсий и является ярким примером контрастных структур [1]. Особый интерес представляет возможность формирования инверсий в далеких областях галактического диска, где поле на порядки слабее [2].

В рамках данной работы уравнение эволюции магнитного поля записывается в планарном приближении [3].

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_r}{\partial t} &= -\frac{\alpha(r, B)}{h} B_\phi - \eta \frac{\pi^2}{4h^2} B_r + \Omega \frac{\partial B_r}{\partial \phi} + \eta \Delta_{r\phi} B_r \\ \frac{\partial B_\phi}{\partial t} &= -r \frac{d\Omega}{dr} B_r - \eta \frac{\pi^2}{4h^2} B_\phi + \Omega \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \eta \Delta_{r\phi} B_\phi\end{aligned}$$

Здесь  $\eta$  выступает в качестве малого параметра, что позволяет предварительно исследовать данный вопрос при помощи асимптотических методов.

В данной задаче использовались случайные начальные условия. Это в наибольшей степени соответствует физической природе процесса [3]: начальные поля ассоциируются с ячейками турбулентности, поле в которых создается с помощью мелкомасштабного динамо, связанного со стохастическими эффектами. Особый интерес представляла возможность генерации контрастных структур при подобной постановке задачи.

Решение описанных уравнений потребовало существенных вычислительных ресурсов в связи с необходимостью перебора существенного количества случайных начальных условий, а также в связи с необходимостью рассмотрения протяженных областей на большом расстоянии от центра галактики. Для решения данной проблемы были использованы параллельные вычислительные методы и программирование на видеокартах [4].

## Литература

1. Нефедов Н.Н., Божевольнов Ю.В., Пыркин В.А. Асимптотика движения контрастной структуры типа всплеска в уравнении реакция-диффузия // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия (2011) №5, с. 3 – 7.
  2. Mikhailov, E., Kasparova, A., Moss, D. et al. Magnetic fields near the peripheries of galactic discs // Astronomy and Astrophysics. - 2014. - V.568. - A66.
  3. Moss D., Sokoloff D. Seed fields for galactic dynamos // Astronomical and Astrophysical Transactions. - 2012. - V. 27. - No.2. – P.139 – 144.
- Михайлов Е.А., Хасаева Т.Т., Тепляков И.О. Возникновение контрастных структур для галактического магнитного поля: теоретические оценки и моделирование на видеокартах». // Труды Института системного программирования РАН (2021). – 33. - №6. С.253 - 264.

# РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ПАРЦИАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ИЗЛУЧЕНИЯ В РАБОТАХ А.Г.СВЕШНИКОВА С 50-Х ПО 70-Е ГОДЫ ХХ ВЕКА

Быков А.А.<sup>1</sup>

*1) Московский Государственный университет имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: abykovmsu@gmail.com*

Среди численных методов решения задачи расчета электромагнитных полей в волноводах и резонаторах сложной формы с неоднородным заполнением особое положение занимает метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям ("неполный метод Галеркина", НМГ). Формулирование, обоснование, применение этого метода для решения широкого класса практически важных задач вычислительной физики принадлежит профессору А.Г. Свешникову [1]. В серии работ 50-х-70-х годов НМГ сформулирован и обоснован для задач рассеяния на ограниченном теле в пространстве, для периодических структур, а также в общем виде без привязки к определенной системе координат и к определенному типу граничных условий. В [2] получил название "Неполный метод Галеркина". Сформулируем основные отличительные черты НМГ.

1. НМГ позволяет создать универсальный алгоритм численного решения задач дифракции как на телах с гладкой функцией диэлектрической проницаемости, так и на объектах с разрывной, в том числе на телах с многослойными покрытиями.

2. Метод позволяет понизить размерность задачи на одну или на две единицы. В частности, при решении двумерных задач НМГ позволяет построить семейство "координатных функций", определенных в поперечном сечении заполненной неоднородным диэлектриком области, что и означает понижение порядка.

3. НМГ позволяет точно поставить и решить задачу рассеяния в неограниченной области с условиями излучения. Заметим, что классический вариант метода Галеркина для задачи в бесконечной области не применим именно из-за невозможности точного удовлетворения условий излучения.

4. НМГ позволяет создать корректную модель расчета собственных волн диэлектрических волноводов (оптических световодов), расчета периодических (например, гофрированных) планарных волноводов (в частности, решеточных элементов связи).

5. Неполный метод Галеркина позволяет привести исходную задачу для уравнений Максвелла с условиями излучения к "жесткой" краевой задаче для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой разработан численный метод, снимающий ограничения на размеры неоднородного тела [3].

Далее мы показываем решение задачи о расчете волноводного перехода с помощью НМГ, в литературе ранее решение подобной задачи не публиковалось.

## Литература

1. Свешников А.Г. К обоснованию метода расчета распространения электромагнитных колебаний в нерегулярных волноводах. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963. Т.3. №2. С.314-326.
2. Свешников А.Г. Неполный метод Галеркина. // Докл. АН СССР, 1977. Т.236. №5. С.1076-1079.

Быков А.А. Устойчивый численный метод решения краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. // Докл. АН СССР, 1980. Т.251. №5. С.1040-1044.

## Секция: «Математическая кибернетика»

### ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ШЕННОНА ДЛЯ ПЛОЩАДИ КЛЕТОЧНЫХ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ И КОММУТАЦИОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ОДНОМ БАЗИСЕ

Ложкин С.А.<sup>1</sup>, Зизов В.С.<sup>2</sup>

- 1) МГУ имени М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра математической кибернетики,  
e-mail: lozhkin@cs.msu.ru
- 2) МГУ имени М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра математической кибернетики,  
e-mail: vzs815@gmail.com

Модель клеточных схем из функциональных и коммутационных элементов (**КСФКЭ**) является математической моделью интегральных схем. Она отличается от хорошо изученной модели «обычных» схем из функциональных элементов (СФЭ) наличием требований на геометрию схемы, учитывающих особенности синтеза СБИС. Модель **КСФКЭ** впервые была предложена С.С. Кравцовым [1], который для конкретного базиса КСФКЭ для  $n=1,2,\dots$  установил порядок роста вида  $2^n$  функции Шеннона  $A(n)$ , характеризующей сложность (площадь) самой «сложной» функции алгебры логики (ФАЛ) от  $n$  переменных,  $n=1,2,\dots$ . Позднее А. Альбрехтом [2] было доказано, что функция Шеннона  $A(n)$  при  $n=1,2,\dots$  асимптотически равна  $\sigma 2^n$ , где  $\sigma$  - константа, точное значение которой в настоящее время неизвестно. Из мощностных соображений следует, что константа  $\sigma$  для исследуемого базиса находится в сегменте  $\left[\frac{1}{4}, \frac{9}{2}\right]$ . Заметим, что в работе Грибка С.В. [3] был предложен специальный базис **КСФКЭ**, для которого константа, аналогичная константе  $\sigma$ , равна 1.

В работе Ложкина С.А. и Зизова В.С. [4] были впервые получены асимптотически точные оценки вида  $n2^{n-1}$  для площади дешифратора порядка  $n$  и стандартной мультиплексорной ФАЛ порядка  $n$ . Более того, для дешифратора порядка  $n$  верхние и нижние оценки его площади имеют вид  $n2^{n-1}\left(1 \pm O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ , то есть их можно считать оценками высокой степени точности.

В настоящей работе показывается универсальный метод синтеза и приводятся нижние мощностные оценки, показывающие, что для базиса из работы [4] значение константы находится в сегменте  $[0.182, 1]$ .

#### Литература

1. Кравцов С.С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов. // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1967. Вып. 19. С. 285—292
2. Альбрехт А. О схемах из клеточных элементов // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1975. Вып. 33. С. 209—214
3. Грибок, С. В., “Об одном базисе для схем из клеточных элементов”, Вестник Московского Университета, сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика., 4 (1999), 36–39.
4. Ложкин С. А., Зизов В. С. Уточненные оценки сложности дешифратора в модели клеточных схем из функциональных и коммутационных элементов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2020 Т. 162 №3. С. 322–334. DOI: 10.26907/2541-7746.2020.3.322-334.

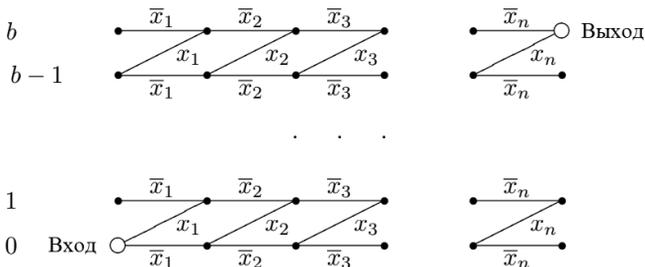
# О СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ САМОКОРРЕКТИРУЮЩИМИСЯ КОНТАКТНЫМИ СХЕМАМИ

Попов Е.А.<sup>1</sup>

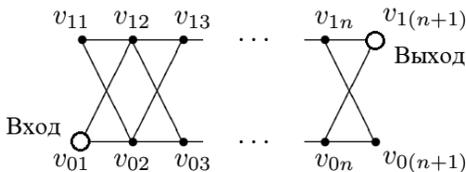
1) Primarius technologies Co. LTD, e-mail: evgeny.a.popov@gmail.com

В теории синтеза дискретных управляющих систем одной из основных задач является задача построения минимальных схем и, в частности, определения их сложности. В настоящей работе исследуется сложность и структура контактных схем (КС), корректирующих фиксированное число обрывов и реализующих либо элементарные симметрические (ЭФ), либо линейные функции алгебры логики (ФАЛ) (см. например [1]).

Результаты базируются на работе [2], в которой была описана структура минимальных КС без коррекции ошибок для ЭС ФАЛ. Используя подобную технику найдено точное значение сложности реализации ЭС ФАЛ от  $n$  булевых переменных (БП) с рабочим числом  $b$  в классе неориентированных КС, корректирующих  $(r - 1)$  обрыв, имеющее для достаточно больших  $n$  и некоторого целого  $C_b^{r,1} \geq 0$  вид  $2(b + 1)rn - C_b^{r,1}$ . Структура полученных минимальных схем выглядит следующим образом:



Также в работе установлено точное значение сложности реализации линейной функции от  $n$  БП в классе ориентированных КС, корректирующих  $(r - 1)$  обрыв, имеющее для некоторого целого  $C_{\oplus}^{r,1} \geq 0$  и достаточно больших  $n$  вид  $4rn - C_{\oplus}^{r,1}$ . Структура полученных при этом минимальных КС выглядит следующим образом:



## Литература

1. Ложкин С.А. Лекции по основам кибернетики //М., Изд-во МГУ. 2004. -256с.
2. Попов Е. А. О сложности и структуре контактных схем, близких к минимальным, для элементарных симметрических функций //Вестник Московского Университета, 2008 №3, стр.47-56.

# О МЕТОДАХ ПРОГРАММНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ ЛОГИКИ Н.П. БРУСЕНЦОВА

Владимирова Ю.С.

*МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической кибернетики,  
e-mail: vladimirova@cs.msu.ru*

Главный конструктор уникальных троичных машин "Сетунь" и "Сетунь 70" Н.П. Брусенцов наиболее значимым достоинством троичной информатики считал трехзначную логику. Он предложил представление логических отношений, в частности, фундаментального отношения следования и метод оперирования отношениями [1].

Первичными в логике Брусенцова являются двузначные качества, обозначаемые терминами  $x, y, z, \dots$ . Булевы выражения понимаются как составные особенности вещей, оцениваемых посредством этих качеств. Вещи могут существовать ( $Vx$ ), не существовать ( $V'x$ ), либо находиться в третьем-привходящем статусе (в этом случае  $x$  умалчивается). Допустимы три вида отношений: существование некоторой вещи, следование и эквивалентность. Например, следование  $x \Rightarrow y$  выражается как конъюнкция трех суждений существования  $VxyVx'y'V'xy'$ . Метод Брусенцова представляет собой набор правил преобразования суждений существования, посредством которых из системы посылок получаются заключения [1].

Николай Петрович рассматривал разработанный им метод как основу компьютерной системы рассуждения. Было предложено несколько вариантов ее реализации, в которых применены различные способы представления булевых выражений, в частности, в виде двоичных шкал [2], троичных цепей [3] и двоичных диаграмм решений [4]. При этом увеличение количества терминов и количества посылок в системе приводило к значительному росту объема памяти, требуемой ее для представления.

В общем случае метод Брусенцова выражает взаимосвязь между двумя особенностями, охарактеризованными произвольными булевыми выражениями. Оказалось, что система рассуждения может быть значительно упрощена, если ограничить ее рассмотрением конъюнкций либо дизъюнкций терминов или их инверсий.

## Литература

1. Брусенцов Н.П. Диаграммы Льюиса Кэрролла и аристотелева силлогистика. // Вычислительная техника и вопросы кибернетики. Вып. 13. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977. С. 164-182.
2. Владимирова Ю. С. Метод индексов Льюиса Кэрролла как основа компьютеризации рассуждения // Программные системы и инструменты. Тематический сборник / Под ред. Л. Королев, Л. С. Корухова, В. А. Костенко, М. Г. Мальковский. — Т. 12 из Программные системы и инструменты. — Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова; МАКС Пресс Москва, 2011. — С. 23–26.
3. Брусенцов Н.П., Владимирова Ю.С. Троичная компьютеризация булевой алгебры. // Третья международная конференция «Цифровая обработка информации и управление в чрезвычайных ситуациях», Минск: Институт технической кибернетики Национальной академии наук Беларуси, 2002.Т. 2, с. 195-199.
4. Bryant R. E.Graph-Based Algorithms for Boolean Function Manipulation // IEEE Transactions on Computers. 1986. Vol. 35. No 8. P. 677–691.

# ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ТОЖДЕСТВ ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ОБОБЩЁННЫХ ПОЛИНОМОВ

Бухман А.В.<sup>1</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, e-mail: antvbx@gmail.com

В данной работе рассмотрим понятие обобщённого полинома. *Обобщённый полином* – сумма по модулю два обобщённых мономов. *Обобщённый моном* – это либо 1, либо произведение переменных или их отрицаний. С помощью обобщённых полиномов можно задавать булевы функции. При этом одной булевой функции соответствует множество обобщённых полиномов. Возникает задача, как выбрать среди этого множества один, который будет оптимальным по некоторой метрике. В данной заметке в качестве метрики рассмотрим длину. Один из подходов к решению этой задачи состоит в том, чтобы выполнять преобразования какого-то полинома функции с использованием системы тождеств для уменьшения длины [1]. Например, системы тождеств, которая на каждом шаге гарантирует уменьшение длины полинома.

Введём вспомогательные понятия. *Подкубом на мономах* порождённым множествами  $A_1, \dots, A_n, A_i \subseteq \{1, x_i, \bar{x}_i\}, 1 \leq |A_i| \leq 2$  будем называть множество всех обобщённых мономов из множества  $A_1 \dots A_n$  (под произведением множеств понимаем всевозможные произведения их элементов). Для такого подкуба можно ввести понятие ранга и размерности по аналогии с булевым кубом.

В работе [2] построена система тождеств, уменьшающих длину. Эта система тождеств применима, если найдётся число  $t$  и подкуб на мономах размерности  $t$  такой, что мощность его пересечения со слагаемыми обобщённого полинома  $\geq 2^{t-1} + 1$ .

В данной заметке этот результат усилен.

**Лемма 1.** Существует система тождеств, уменьшающих длину, которая применима для обобщённого полинома, если существует подкуб на мономах размерности  $t \geq 3$ , который в пересечении с множеством слагаемых этого обобщённого полинома имеет  $2^{t-1}$  элементов.

Этот результат можно использовать для решения задачи проверки обобщённого полинома на минимальность. Задача: на вход подаётся обобщённый полином, на выходе выдаём Да, если этот полином минимален, Нет – иначе. Под плотностью подмножества  $X$  в множестве  $Y$  будем понимать отношение мощности  $X \cap Y$  к мощности  $Y$ . Сформулируем следующее необходимое условие минимальности.

**Лемма 2.** Для того чтобы заданный полином был минимальным необходимо, чтобы для любого подкуба на мономах размерности больше 3 плотность слагаемых этого обобщённого полинома в подкубе была строго меньше  $\frac{1}{2}$ .

**Теорема 1.** Существует полиномиальный алгоритм, который получив на вход запись обобщённого полинома (для полинома от  $n$  переменных с  $l$  слагаемыми длина записи будет  $O(nl)$ ), проверяет выполнимость условий леммы 2.

## Литература

1. Brand D., Sasao T. Minimization of AND-EXOR expressions using rewrite rules // IEEE Transactions on Computers, vol. 42, no. 5, pp. 568-576, May 1993.
2. Бухман А.В. О применении одного семейства тождеств для минимизации обобщённых полиномов // Тихоновские чтения. Тезисы докладов, с. 66, 2021.

**О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ  
ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ ДИГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ,  
ПОСТРОЕННЫХ ПО ВЫБОРКЕ СЛУЧАЙНОГО ОБЪЕМА**

Кудрявцев А.А.<sup>1,2</sup>, Шестаков О.В.<sup>1,2,3</sup>

- 1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической статистики,  
e-mail: aakudryavtsev@cs.msu.ru, oshestakov@cs.msu.ru
- 2) Московский центр фундаментальной и прикладной математики
- 3) Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук

Большую роль в прикладной теории вероятностей и математической статистике играют гамма- и бета-классы распределений, зарекомендовавшие себя удобными и эффективными инструментами при моделировании многих реальных процессов. В докладе рассматривается предложенное авторами дигамма-распределение, к частным видам которого относятся обобщенное гамма-распределение, обобщенное бета-распределение второго рода и гамма-экспоненциальное распределение.

В работе [1] было показано, что дигамма-распределение адекватно описывает байесовские модели баланса [2]. Это прежде всего вызвано тем, что дигамма-распределение может быть представлено как масштабная смесь двух случайных величин, имеющих обобщенное гамма-распределение.

В случае моделирования реального процесса при помощи дигамма-распределения неизбежно возникает вопрос оценивания неизвестных параметров по реальным данным. Ввиду представления плотности дигамма-распределения в терминах специальной H-функции Фокса, метод максимального правдоподобия представляется затруднительным. То же можно сказать и о прямом методе моментов. По этой причине авторами было предложено [1] оценивать параметры дигамма-распределения при помощи модифицированного метода, основанного на логарифмических кумулянтах.

В современном быстро меняющемся мире достаточно проблематично использовать традиционный статистический подход, основанный на анализе выборки фиксированного объема. Поскольку зачастую накопление достаточного фиксированного объема статистики может растянуться на неопределенное время, имеет смысл стремиться к обладанию методами, позволяющими делать адекватные выводы исходя из априори неопределенного числа наблюдений. Такой подход неизбежно ведет к рассмотрению моделей с рандомизированным объемом выборки и обычно встречается в медицине, страховании и пр.

В докладе обсуждается асимптотика распределений статистических оценок параметров дигамма-распределения, построенных по выборкам случайного объема.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 22-11-00212); исследования проводились в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

**Литература**

1. Kudryavtsev A.; Shestakov O. Asymptotically normal estimators for the parameters of the gamma-exponential distribution //Mathematics (2021) **9**, 273.
2. Кудрявцев А.А. Байесовские модели баланса //Информатика и её применения (2018) **12**, №3, с.18–27.

## ПРИОРИТЕТНАЯ СИСТЕМА $G|G|1|_{\infty}$ С ПРОФИЛАКТИКАМИ ОБСЛУЖИВАЮЩЕГО ПРИБОРА

Берговин А.К.<sup>1</sup>, Ушаков В.Г.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической статистики,  
e-mail: alexey.bergovin@gmail.com

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической статистики,  
Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН, e-mail: vgushakov@mail.ru

В данном докладе рассматривается однолинейная система обслуживания с неограниченным числом мест для ожидания, в которую поступает рекуррентный поток требований с некоторой заданной функцией распределения. Требования разделяются на несколько приоритетных классов, независимо друг от друга и от состояния системы, между классами установлена дисциплина относительного приоритета. Для каждого класса задается функция распределения обслуживания. В те моменты времени, когда система становится свободной, обслуживающий прибор отправляется на профилактику, которая длится случайное время с заданной функцией распределения, длительность профилактики не зависит ни от входящего потока, ни от времени обслуживания, ни от длительности других профилактик. Данный тип систем обслуживания хорошо описывает функционирование реальных вычислительных и информационных систем. Профилактики могут интерпретироваться как необходимое техническое обслуживание прибора или как обслуживание второстепенных заявок.

Используя метод дополнительных компонент, найдено нестационарное совместное распределение числа требований каждого типа в системе. Также, предложено интегральное преобразование, которое сводит систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающую исследуемую систему обслуживания, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой было найдено.

### Литература

1. Takagi H. Queueing Analysis: A Foundation of Performance Analysis, Volume 1: Vacation and Priority Systems, Part 1.// Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam. 1991, 488 стр.
2. Doshi B.T. Queueing systems with vacations – a survey //Queueing Systems 1986 №1, p. 29-66.
3. Кондранин Е.С., Ушаков В.Г. Система обслуживания с относительным приоритетом и профилактиками прибора // Информатика и её применения 2018. 12 №4, с 33-38

# ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕПОЛНЕНИЯ БОЛЬШОГО БУФЕРА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ ТРАФИКА С НЕОДНОРОДНЫМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ

Хохлов Ю.С.<sup>1</sup>, Куковкина М.А.<sup>2</sup>, Ван Г.С.<sup>3</sup>

- 1) МГУ, ВМК, кафедра Математической статистики, e-mail: yskhokhlov@yandex.ru
- 2) МГУ, ВМК, кафедра Математической статистики, e-mail: grethen2015@gmail.com
- 3) МГУ, ВМК, кафедра Математической статистики, e-mail: yan.wgs@yandex.ru

При анализе работы телекоммуникационной системы важно иметь возможность оценить качество обслуживания этой системы. Одной из наиболее популярных характеристик качества обслуживания является вероятность переполнения буфера системы. Довольно редко можно найти точное явное аналитическое выражение для этой характеристики. Чаще используется та или иная оценка.

В нашем докладе мы исследуем систему, где входной поток нагрузки представляет собой сумму некоторой средней нагрузки и независимых дробного броуновского движения и устойчивого движения Леви. Обслуживание производится одним сервером с интенсивностью обслуживания  $C > 0$ . При условии  $r = C - m > 0$  в системе существует стационарный режим. Нас интересует значение  $P(Q > b)$  для большого размера буфера  $b$ , где  $Q$  - максимальное значение нагрузки в стационарном режиме. Мы получаем нижнюю и верхнюю асимптотические оценки для этого значения при больших значениях размера буфера. Обе оценки убывают степенным образом с увеличением объема буфера. Метод доказательства основан на теореме Слепяна (1962) и некоторых идеях из работы К. Дебицки, З. Михны, Т. Рольски (1998).

Это исследование было проведено в соответствии с научной программой Московского центра фундаментальной и прикладной математики и факультета вычислительной математики и кибернетики Московского университета.

## Литература

1. K. Debicki, Z. Michna, T. Rolski. On the supremum from Gaussian processes over infinite horizon. // Probability and Mathematical Statistics. – Vol. 18, 1998, 83-100.

# ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА МАГНИТОЭНЦЕФАЛОГРАФИИ С ДВУМЯ ДИПОЛЯМИ

Пахненко И.П.<sup>1</sup>, Захарова Т.В.<sup>2</sup>

1) МГУ, ВМК, кафедра Математической Статистики, e-mail: vppmob@gmail.com

2) МГУ, ВМК, кафедра Математической Статистики, e-mail: tvzaharova@mail.ru

Настоящая работа посвящена сложной задаче функционального картирования головного мозга человека, которую предпочтительно решать современными методами неинвазивного исследования головного мозга. Одним из таких методов является магнитоэнцефалография (МЭГ).

МЭГ дает уникальные возможности для неинвазивного изучения процессов в нейронах головного мозга [1, 2]. Данная процедура позволяет отслеживать мельчайшие колебания магнитного поля, создаваемого нейронами мозга.

Зарегистрированные процедурой МЭГ сигналы содержат информацию о различных электрических активностях, наблюдаемых внутри головного мозга. Одной из важнейших задач является точная локализация областей активности нейронов [3], заключающаяся в воссоздании положения диполей, которые являются источниками сигналов. На данный момент отсутствует унифицированный способ решения подобной проблемы с заданной точностью. В однодипольном случае обратная задача локализации была решена для сферической и эллипсоидальной моделей головы в работах [3, 4], что послужило базисом для исследования и получения результатов в более сложной двудипольной постановке задачи.

Предлагаемый алгоритм решения обратной задачи с двумя диполями включает несколько шагов. Первый шаг включает в себя приблизительное вычисление координат диполей путем применения метода независимых компонент, метода ансамбля решающих деревьев, EM алгоритма к первичным сигналам МЭГ и использования аналитического решения для обратной задачи МЭГ в однодипольном случае; на втором шаге проблема нахождения источников активности решается методами оптимизации при нахождении экстремума целевой функции с использованием в качестве начального приближения результатов, полученных на первом шаге.

В ходе тестирования было показано, что при использовании в качестве начального приближения координат, полученных аналитически, методы оптимизации сходятся быстрее и точнее определяют координаты активных диполей.

В данной работе предложены и исследованы новые, ранее неприменяемые методы для решения обратной задачи магнитоэнцефалографии с двумя источниками с целью получения достаточной точности в локализации положения источников для использования в реальных условиях.

## Литература

1. Baillet S., Mosher J.C., Leahy R.M. Electromagnetic Brain Mapping // IEEE Signal Processing Magazine. 2001. P. 14–30.
2. Sarvas J. Basic mathematical and electromagnetic concepts of the biomagnetic inverse problem // Physics in Medicine and Biology. 1987. Vol. 32. P. 11–22.
3. Zakharova T.V., Karpov P.I., Bugaevskii V.M. Localization of the activity source in the inverse problem of magnetoencephalography // Computational Mathematics and Modeling. 2017. Vol. 28, No 2. P. 148–157.
4. Karpov P.I., Zakharova T.V. Magnetoencephalography inverse problem in the spheroid geometry // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2019. Vol. 27, No 2. P. 159–169.

## ПРОВЕРКА БИОЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОПУЩЕННЫХ ДАННЫХ

Клименко В.К.<sup>1</sup>, Захарова Т.В.<sup>2</sup>

1) МГУ, ВМК, кафедра Математической статистики, e-mail: RockTheBrony@gmail.com

2) МГУ, ВМК, кафедра Математической статистики, e-mail: tvzaharova@mail.ru

В работе рассмотрена проблема проверки гипотезы биоэквивалентности при наличии пропущенных данных и предложен метод ее решения. При перекрестных дизайнах медицинских исследований потеря одного наблюдения, при традиционном подходе, вынуждает исследователя потерять также и другие собранные наблюдения, из-за чего объем обрабатываемой информации уменьшается. Альтернативно, для сохранения информации потерянные наблюдения можно заменять средними значениями, однако это приводит к неконтролируемому повышению вероятности ошибки первого рода, то есть риска потребителя.

Метод, предложенный в данной работе, позволяет использовать все доступные данные и при этом контролировать вероятность ошибки первого рода. Для исследования был выбран дизайн эксперимента, применяющийся на практике в клинических исследованиях. Предложенный метод основан на традиционном, доказавшем свою эффективность и корректность, критерии Шуирманна, также известном как процедура двух односторонних тестов Шуирманна. Критерий Шуирманна требует полные пары данных, то есть, при потере одного наблюдения для испытуемого, приходится отказаться и от другого, неутраченного наблюдения. В работе доказано утверждение, позволяющее использовать критерий Шуирманна, не отказываясь от собранных наблюдений, при условии, что существуют такие функции неутраченных данных, которые ограничивают, хотя бы с некоторой уверенностью, значение статистики критерия. В работе предложен способ построения таких функций, основанный на построении доверительных интервалов для утраченных данных. При помощи синтетических данных было показано, что эмпирический уровень доверия этих интервалов очень близок к теоретическому, доказывая правильность теоретического результата. При помощи синтетических данных при разных параметрах модели были вычислены эмпирические вероятности ошибок первого и второго рода. Теоретический результат был подтвержден. Однако, ошибка второго рода у предложенного метода оказалась выше в сравнении с традиционным методом, в котором непарные наблюдения игнорируются.

Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Математического центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2019-1621.

### Литература

1. Т.В. Захарова, А.А. Тархов. Оценка уровня значимости критерия Шуирманна для проверки гипотезы биоэквивалентности при наличии пропущенных данных // Информатика и её применения. 2019. Т.12. Вып. 3.
2. М.А. Драницына, Т.В. Захарова, Р.Р.Ниязов. Свойства процедуры двух односторонних тестов для признания биоэквивалентности лекарственных препаратов // Журнал "Ремедиум". №3, 2019. СССР (1954) 95, №6, с.1153–1156.
3. Roger L. Berger, Jason C. Hsu. Bioequivalence Trials, Intersection–Union Tests and Equivalence Confidence Sets // Statistical Science 1996. Vol. 11, No. 4. pp. 283–319.

# МОМЕНТНОЕ НЕРАВЕНСТВО С ПРИМЕНЕНИЕМ К ОЦЕНКАМ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ПУАССОНОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ СУММ

Макаренко В.А.<sup>1</sup>, Шевцова И.Г.<sup>2</sup>

1) ВМК МГУ, кафедра Математической статистики, e-mail: vlamakarenko@mail.ru

2) ВМК МГУ, кафедра Математической статистики, e-mail: ishevtsova@cs.msu.ru

Пусть  $X$  — невырожденная случайная величина с функцией распределения  $F$  и  $\mathbb{E}|X|^3 < +\infty$ . Обозначим

$$L_0(F) = \frac{\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^3}{(\mathbb{D}X)^{3/2}}, L_1(F) = \frac{\mathbb{E}|X|^3}{(\mathbb{E}X^2)^{3/2}}.$$

Функционалы  $L_0$  и  $L_1$  называются соответственно центральным и нецентральным ляпуновскими отношениями.

В докладе при каждом  $t \in (-1, 1)$  представлены значения функций

$$H(t) = \sup_{\substack{F: \mathbb{E}X=t, \\ \mathbb{E}X^2=1}} \frac{\mathbb{E}|X|^3}{\mathbb{E}|X-t|^3}, H(t)(1-t^2)^{3/2} = \sup_{\substack{F: \mathbb{E}X=t, \\ \mathbb{E}X^2=1}} \frac{L_1(F)}{L_0(F)}$$

и указаны соответствующие (двухточечные) экстремальные распределения, а также показано, что

$$\sup_F \frac{L_1(F)}{L_0(F)} = \sup_{t \in (-1, 1)} H(t)(1-t^2)^{3/2} = \frac{\sqrt{17+7\sqrt{7}}}{4} = 1.48997 \dots,$$

тем самым доказана гипотеза, сформулированная С. Я. Шоргиным в [1].

Также получена новая оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для пуассоновских случайных сумм в терминах центрального ляпуновского отношения.

## Литература

1. S. Ya. ShorGIN. Approximation of generalized Poisson distributions: Comparison of Lyapunov fractions // In 21st Seminar on Stability Problems for Stochastic Models (January 28 – February 3, 2001, Eger, Hungary): Abstracts, pages 166–167, Eger, Hungary, 28 January – 03 February 2001. House of University of Debrecen.

## Секция: «Обратные задачи управления»

# О НЕПРЕРЫВНОСТИ ВРЕМЕНИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ КАК ФУНКЦИИ ОТ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ УПРАВЛЯЕМОГО ОБЪЕКТА

Никольский М.С.<sup>1</sup>

*1) Математический институт имени В.А.Стеклова РАН;  
кафедра Оптимального управления факультета ВМК МГУ, e-mail: mni@mi-ras.ru*

Рассматривается линейный управляемый объект вида :

$$\dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x_0,$$

где  $x \in R^n$  ( $n \geq 1$ ),  $u \in U$ ,  $U$  – выпуклый компакт из  $R^r$  ( $r \geq 1$ ),  $A$  –  $n \times n$ -матрица,  $B$  –  $n \times r$ -матрица. Движение управляемого объекта происходит под воздействием измеримых по Лебегу управлений  $u(t) \in U$  при неотрицательных значениях времени  $t$ . В качестве терминального множества рассматривается нулевая точка из  $R^n$ .

Обозначим через  $S$  множество начальных точек  $x_0$ , из которых точка 0 достижима за конечное время. На  $S$  определена функция  $T(x_0)$  – время оптимального быстродействия.

В докладе рассматривается вопрос о непрерывности функции  $T(x_0)$  на множестве  $S$ . Было получено обобщение части Теоремы 22 на стр. 160, 161 из [1], касающейся непрерывности функции  $T(x_0)$ . В Теореме 22 предполагается, что : 1)  $U$  – выпуклый многогранник, причем нулевой вектор 0 из  $R^r$  является внутренней точкой для  $U$ ; 2) для тройки  $(A, B, U)$  выполнено условие нормальности, иначе называемое условием общности положения.

Наше обобщение состоит в том, что для непрерывности функции  $T(x_0)$  на  $S$  мы накладываем более слабые требования : 1) пара матриц  $(A, B)$  является управляемой по Калману ; 2) нулевой вектор из  $R^r$  является внутренней точкой множества  $U$ .

Нами было также получено обобщение этого результата на нестационарный случай.

### Литература

1. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления // М. : Наука – 1972.

# ОПТИМАЛЬНОЕ ЧЕРЕДОВАНИЕ ЛЕЧЕНИЯ И ЕГО ОТСУТСТВИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕЛАНОМЫ

Хайлов Е.Н.<sup>1</sup>, Григорьева Э.В.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,  
e-mail: khailov@cs.msu.ru

2) Техасский Женский Университет, кафедра математики и компьютерных наук,  
e-mail: krasavizha@yahoo.com

Современные таргентные методы лечения меланомы основаны на непрерывном использовании максимально переносимой пациентом дозы. При этом они быстро устраняют чувствительные к лекарственным препаратам раковые клетки. В результате такое лечение изменяет конкуренцию между лекарственно-чувствительными и лекарственно-устойчивыми раковыми клетками в пользу последних. Поэтому лекарственно-устойчивые раковые клетки начинают доминировать в организме пациента и применяемое лечение может оказаться неэффективным.

Новым направлением в лечении меланомы является адаптивная терапия [1]. Она позволяет выжить значительному количеству лекарственно-чувствительных раковых клеток благодаря использованию минимально эффективных доз лекарственных препаратов или временных перерывов в их приеме. В результате эти клетки подавляют пролиферацию (размножение) лекарственно-устойчивых раковых клеток за счет конкуренции за общие ограниченные ресурсы. Для успешных результатов адаптивной терапии крайне важно найти оптимальные моменты переключения с этапа ее активного проведения на этап ее отсутствия и наоборот с учетом особенностей пациента.

В настоящем докладе на заданном временном отрезке, являющемся общим периодом лечения меланомы, рассматривается математическая модель Лотки-Вольтерры [2], задаваемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которая описывает конкуренцию между лекарственно-чувствительными и лекарственно-устойчивыми раковыми клетками при проведении адаптивной терапии. Эта модель также содержит управляющую функцию времени, отвечающую за переход от этапа активного проведения адаптивной терапии к этапу ее отсутствия и наоборот. Для нахождения оптимальных моментов переключения между этими этапами ставится задача минимизации раковой нагрузки как на всем общем периоде лечения меланомы, так и в его конечный момент. Аналитическое исследование такой задачи минимизации осуществляется с помощью использования принципа максимума Понтрягина. Результаты проведенного исследования подтверждаются численными расчетами, выполненными в среде “ВОСОР-2.0.5”, для значений параметров исходной модели Лотки-Вольтерры и ее начальных условий, взятых из реальной клинической практики [1].

## Литература

1. Kim E., Brown J.S., Eroglu Z., Anderson A.R.A. Adaptive therapy for metastatic melanoma: predictions from patient calibrated mathematical models // *Cancers* (2021) **13**, 823, p.1–15.
2. Хайлов Е.Н., Григоренко Н.Л., Григорьева Э.В., Клименкова А.Д. Управляемые системы Лотки-Вольтерры в моделировании медико-биологических процессов // М.: МАКС Пресс – 2021.

## **ОБ ОДНОЙ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ ПАРАМЕТРОМ**

Отакулов С.<sup>1</sup>, Собирова Г.Д.<sup>2</sup>,

*1) Джизакский политехнический институт, г. Джизак, Узбекистан,  
e-mail: lotakulov52@mail.ru,*

*2) Самаркандский государственный университет имени Шарафа Рашидова, г. Самарканд,  
Узбекистан, e-mail: sobir.1972@gmail.com*

В работе рассматривается один класс динамических систем управления, описываемый управляемым дифференциальным включением с дополнительным структурным параметром. Предполагается, что структурный параметр принимает дискретные значения, а информация о начальном состоянии неточно и задано в виде геометрического ограничения. Качество управления оценивается негладким терминальным функционалом типа минимума. Изучена задача оптимального управления минимаксного вида. Для этой негладкой задачи оптимального управления получены необходимые и достаточные условия оптимальности. На основе полученных условий оптимальности предложен алгоритм решения рассмотренной задачи.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФЕКЦИОННОГО ЗАБОЛЕВАНИЯ

Семендяева Н.Л.<sup>1,2</sup>, Киселёв Ю.Н.<sup>3</sup>, Аввакумов С.Н.<sup>4</sup>, Орлов М.В.<sup>5</sup>, Орлов С.М.<sup>6</sup>

1) МГУ, ВМК, лаборатория математического моделирования в физике,  
e-mail: natalys@cs.msu.ru

2) Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, факультет вычислительной математики и  
кибернетики, e-mail: 6620180045@smbu.edu.cn

3) МГУ, ВМК, кафедра оптимального управления, e-mail: kiselev@cs.msu.ru

4) МГУ, ВМК, кафедра оптимального управления, e-mail: asn@cs.msu.ru

5) МГУ, ВМК, кафедра оптимального управления, e-mail: orlov@cs.msu.ru

6) МГУ, ВМК, кафедра оптимального управления, e-mail: sergey.orlov@cs.msu.ru

В докладе содержится обзор результатов, полученных авторами при исследовании известной математической модели распространения инфекционных заболеваний SIR. Модель SIR была предложена шотландскими учёными Уильямом Огилви Кермаком и Андерсоном Греем Маккендриком около 100 лет назад [1]. Базовая модель Кермака-Маккендрика представляет собой систему интегро-дифференциальных уравнений для переменных, описывающих численность здоровых, заболевших и выздоровевших особей популяции. В той же работе был рассмотрен и упрощённый вариант модели – система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для аналогичных переменных. Именно за этой упрощённой моделью закрепилось в научном мире название SIR. Несмотря на многолетнюю историю, модель SIR актуальна и по сей день, поскольку является основой для математического моделирования большого числа эпидемий и пандемий инфекционных заболеваний, затрагивающих нашу цивилизацию. Модификации модели SIR использовались для описания распространения малярии и чумы в средние века, а также более поздних эпидемий гриппа, в том числе свиного, кори, гепатита, краснухи [2].

В данной работе рассмотрены теоретические аспекты модели распространения инфекций SIR. Найден аналитический вид фазовых траекторий. Выполнен качественный анализ стационарных состояний, определены точки покоя и их тип. Впервые получено выражение значений координат точек покоя через W-функцию Ламберта для произвольных начальных данных. Продемонстрированы достоинства и недостатки модели SIR при моделировании пандемии COVID-19 в ряде регионов России и Китая.

### Литература

1. W.O. Kermack and A.G. McKendrick. A contribution to the mathematical theory of epidemics // Proceedings of the Royal Statistical Society, London, A, 115, 1927, 700–721.
2. C.I. Siettos, L. Russo. Mathematical modeling of infectious disease dynamics // Virulence, 2013, V.4, № 4, p. 295-306.

# О ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ВОЗМУЩЕНИЯ В СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Сурков П.Г.<sup>1,2</sup>

1) ИММ УрО РАН, отдел дифференциальных уравнений, e-mail: spg@imm.uran.ru

2) УрФУ, ИЕНиМ, кафедра прикладной математики и механики.

Задачи управления динамическими системами являются одними из самых распространенных в прикладных исследованиях. Большое количество различных постановок задач управления обусловлено активным и успешным их. Особое место среди таких постановок занимает задача устойчивого восстановления (реконструкции) неизвестного внешнего воздействия на динамическую систему по результатам неполных и неточных измерений ее траектории. В настоящем докладе мы будем рассматривать задачу реконструкции для системы дифференциальных уравнений дробного порядка с дробной производной Капуто. Такая задача реконструкции относится к классу обратных задач динамики [1]. Базовые аспекты подхода динамической реконструкции, которому мы будем следовать, заложены в работе [2], а основные направления развития подхода отражены в [3].

Отличительной особенностью рассматриваемой задачи реконструкции, как и метода динамической реконструкции, является тот факт, что траектория изучаемой системы неизвестна а priori, т. е. координаты позиции системы доступны для измерения одновременно с ее функционированием (в режиме он-лайн). Основной мотивацией задачи является, во-первых, расширение области применения метода динамической реконструкции на широкий класс динамических управляемых систем, содержащих дробные производные. Во-вторых, будет обобщен сам метод, а именно, в нем будет использоваться специальную модификацию метода регуляризации Тихонова с недифференцируемым стабилизатором, включающим классическую вариацию [4, 5]. Использование такого вида стабилизаторов позволяет восстанавливать тонкую структуру неизвестного входного воздействия, т.е. негладкие (разрывные) возмущения, что является достаточно реалистичными свойствами управляющего воздействия. Предлагаемый в докладе алгоритм решения задачи реконструкции обладает свойством устойчивости к информационным помехам и погрешностям вычислений. Доказана теорема о сходимости алгоритма, и рассмотрен модельный пример.

## Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач // М.: URSS–4-е издание – 2022.
2. Кряжмский А.В., Осипов Ю.С. О моделировании управлений в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика (1983) №2, с.51–60.
3. Maksimov V.I. The methods of dynamical reconstruction of an input in a system of ordinary differential equations // J. Inverse and Ill-Posed Problems (2021) 29, №1, с.125–156.
4. Леонов А.С. Кусочно-равномерная регуляризация некорректных задач с разрывными решениями // Ж. выч. матем. и матем. физ. (1982) 22, №3, с.516–531.
5. Васин В.В. Основы теории некорректных задач // Новосибирск: Изд-во СО РАН – 2020.

## О МНОЖЕСТВЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ОДНОГО ОБЪЕКТА С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

Гончарова М.Н.<sup>1</sup>, Самсонов С.П.<sup>2</sup>

- 1) Гродненский государственный университет имени Я. Купалы, факультет математики и информатики, кафедра фундаментальной и прикладной математики,  
e-mail: m.gonchar@grsu.by
- 2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,  
e-mail: samsonov@cs.msu.su

Рассмотрим линейную задачу быстродействия, в которой поведение объекта описывается системой  $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = v$  управление  $v$  является кусочно-непрерывной функцией, принимающей значения из отрезка  $[-1; 1]$ , и на движение которого наложено фазовое ограничение  $x_2 \leq d, d > 0$ . Требуется построить множество управляемости, состоящее из всех точек пространства переменных  $(x_1; x_2)$ , из которых можно перейти в начало координат за промежуток времени длины  $t$ .

Показано, что если выполняется неравенство  $t \leq d$ , то искомое множество ограничено параболой  $x_1 = -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{4}(x_2 - t)^2$ ,  $x_1 = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{4}(x_2 + t)^2$ . В противном случае искомое множество ограничено кривыми  $x_1 = \frac{d^2}{2} - (t - d)d + \frac{1}{2}(x_2 - d)^2$ ,  $x_1 = -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{4}(x_2 - 2d - t)^2$ ,  $x_1 = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{4}(x_2 + t)^2$  и границей  $x_2 = d$  множества, определяющего фазовое ограничение.

### Литература

1. Самсонов С.П. Восстановление выпуклого множества по его опорной функции с заданной точностью // Вестник Московского университета. 1983, Серия 15, Вычислительная математика и кибернетика, №3, с. 68-71.
2. Киселев Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. М.: МАКС Пресс, 2007. – 272 с.

## ТЕРМИНАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРА

Горьков В.П.<sup>1</sup>, Григоренко Н.Л.<sup>2</sup>

1) МГУ, ВМК, кафедра математической физики, e-mail: v-p-gorkov@yandex.ru

2) МГУ, ВМК, кафедра оптимального управления, e-mail: grigor@cs.msu.ru

В работе излагается вывод уравнений движения квадрокоптера. Сам квадрокоптер рассматривается с позиций абсолютно твердого тела. Демонстрируются выводы физических характеристик тела ( матрицы инерции, угловых скоростей вращения и т.д.). Терминальная задача формулируется как задача отыскания функции управления, переводящей тело из начальной фазовой точки в конечную точку состояния [1].

Управление ищется на множестве конечных полиномов по времени. Рассмотрены задача вертикального подъема с зависанием и задача движения в вертикальной плоскости. В конечной точке могут быть заданы значения разных фазовых параметров. Проведен анализ их влияния на форму траектории движущегося тела. Результаты расчетов приведены на графиках.

### Литература

1. Батенко А.П. Системы терминального управления //М.: Радио и связь.-1984.

# К ЗАДАЧЕ КОНСТРУИРОВАНИЯ УПРАВЛЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Горьков В.П.<sup>1</sup>, Григоренко Н.Л.<sup>2</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической физики,  
e-mail: v-p-gorkov@yandex.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,  
e-mail: grigor@cs.msu.ru

Рассматривается задача терминального управления, с позиции игрока Р, для нелинейной дифференциальной игры, динамика которой описывается системами дифференциальных уравнений:

$$E : \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, & y_1(0) = y_{10}, \\ \dot{y}_2 = -f_2(y_1, y_2) + \sigma v, & y_2(0) = y_{20}, \\ \|v\| \leq 1, \\ y_i \in R^n, i = 1, 2. \end{cases}$$
$$P : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2 = -f_1(x_1, x_2) + \rho u, & x_2(0) = x_{20}, \\ \|u\| \leq 1, \\ x_i \in R^n, i = 1, 2. \end{cases}$$

Цель Р: выполнение соотношений  $\|x_1(T) - y_1(T)\| \leq \ell$ ,  $\|x_2(T) - y_2(T)\| \leq \ell$ ,  $\ell > 0$ , при любом допустимом управлении игрока Е.

Управление игрока Е - измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие ограничениям; управления игрока Р - контруправления [1-3]. На функции  $f_1(x_1, x_2)$ ,  $f_2(y_1, y_2)$  наложены условия, гарантирующие существование, единственность и нелокальную продолжимость решений систем уравнений, содержащих параметры управления. Рассмотрены случаи нескольких вариантов ограничений на параметры управлений игроков и доступной информации первого игрока о фазовых переменных игры. Получены достаточные условия окончания игры за конечное время для заданной начальной позиции. Предлагаемые конструкции управления первого игрока опираются на условия разрешимости игровых задач управления [1-3] и метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов [4]. Управление первого игрока, гарантирующее окончание игры, получено в аналитической форме. Демонстрируются результаты численного моделирования игрового процесса.

## Литература

1. Избранные труды Л.С.Понтрягина. М. МаксПресс. 2004. 552 с.
2. Избранные труды Ю.С.Осипова. М. Изд-во МГУ. 2009. 656 с.
3. Красовский Н.Н. Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.Наука.1974.
4. Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами. Теория системного синтеза. М. URSS.2019.

# О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ В ТЕРМИНАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Кулевский А.В.

*МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,  
e-mail: kulevskyav@cs.msu.su*

Рассматривается терминальная задача оптимального управления с линейной динамикой:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0 \\ J = \Phi(x(T)) \rightarrow \min_{u(\cdot) \in U} \end{array} \right. \quad (1)$$

где фазовый вектор  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , управление  $u(t) \in U$  – измеримая на отрезке  $[t_0, T]$  ограниченная функция,  $A_{n \times n}$  – постоянная матрица,  $t_0, T > t_0$  – фиксированные начальный и конечный моменты времени, множество начальных состояний  $M_0 \subset \mathbb{R}^n$  – выпуклый компакт, множество управлений  $U \subset \mathbb{R}^m$  – компакт, критерий качества  $J$  имеет терминальный вид, где  $\Phi(x)$  – гладкая выпуклая в  $\mathbb{R}^n$  функция.

Свойства задачи (1) и основанные на них алгоритмы решения во многом известны и описаны в [2], [4], [5]. Эти методы опираются на использование принципа максимума Понтрягина, применение аппарата опорных функций, элементов выпуклого анализа и теории многозначных отображений. Кроме того, на практике на разных этапах активно используются численные методы конечной оптимизации. В случае единственного решения данный подход позволяет успешно решить задачу (1). Однако в (1) возможна и неединственность решения. Это, во-первых, может на некоторых шагах затруднить применение численных расчетов. Во-вторых, встает дополнительный вопрос описания всех оптимальных пар  $(u_*(t), x_*(t))$ .

Доклад посвящен рассмотрению двух конкретных примеров задачи (1), в которых характерным образом возникает неединственность решения. В первом случае за счет неединственности правого конца оптимальной траектории, что является результатом негладкости множества  $U$  и, как следствие, негладкости множества достижимости  $X(T)$ . Во втором по причине множественности решений условия максимума на отрезке времени положительной длины. Для обоих примеров даются полное описание всех оптимальных пар  $(u_*(t), x_*(t))$ , образующих бесконечные семейства, и соответствующее оптимальное значение целевой функции  $J_*$ .

## Литература

1. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление (линейная теория). М.: Высш. шк., 2001.
2. Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. М.: МАКС Пресс, 2007.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
4. Самсонов С.П. Восстановление выпуклого множества по его опорной функции с заданной точностью // Вестник Московского университета. 1983, Серия 15, Вычислительная математика и кибернетика, №3, с. 68-71.
5. Самсонов С.П. Одна задача оптимального управления с различными функционалами качества // Тр. МИАН СССР им. В.А. Стеклова, 1988, Т.185, с. 215-221.

## **О ВЕКТОРНЫХ ГАРАНТИЯХ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

Жуковский В.И.<sup>1</sup>, Жуковская Л.В.<sup>2</sup>, Мухина Ю.С.<sup>3</sup>

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,  
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

2) Центральный экономико-математический институт РАН,  
e-mail: zhukovskaylv@mail.ru

3) МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра высшей алгебры, e-mail: js.mukhina@mail.ru

Перенос результатов статьи Жуковского В.И., Жуковской Л.В., Самсонова С.П., Смирновой Л.В. «Принцип Сэвиджа и учет исхода в однокритериальной нелинейной задаче при неопределенности» в журнале Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета на случай многокритериальной постановки.

### **Литература**

1. Zhukovskii V.I., Salukvadze M.E. The vector-valued maximin // New York etc.: Academic Press. – 1994.
2. Жуковский В.И., Жуковская Л.В. Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности. М.: URSS – 2017.
3. Дмитрук А.В. Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс. М.: МАКСПРЕСС – 2012.
4. Жуковский В.И., Жуковская Л.В., Самсонов С.П., Смирнова Л.В. Принцип Сэвиджа и учет исхода в однокритериальной нелинейной задаче при неопределенности // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета, 2022, том 59, с. 25–40.

Сорока А.Г. ....	70	Денисов В.Н. ....	21	Мысова К.М. ....	32
Абгарян К.К. ....	45	Дубинин В.Д. ....	50	Мяо Хуэй-хуэй. ....	57
Абрамова В.В. ....	18	Егоренков В.А. ....	33	Немешаева А.А. ....	71
Авагян Д.А. ....	46	Егоров В.М. ....	38	Нефедов В.В. ....	24
Аввакумов С.Н. ....	114	Еремин Ю.А. ....	76	Нефедов Н.Н. ....	90, 94
Акимова Е.Д. ....	15	Ершов Н.М. ....	61, 62, 64	Никитин А.Г. ....	89
Алмохамед М. ....	82	Ефремова Н.Э. ....	50	Никитин С.Ю. ....	77
Андреев В.Ф. ....	30	Желтков Д.А. ....	44	Николашкин А.Г. ....	64
Аргун Р.Л. ....	97	Жуковская Л.В. ....	120	Никольский И.М. ....	60
Аристов А.И. ....	25, 26	Жуковский В.И. ....	120	Никольский М.С. ....	111
Атамась Е.И. ....	12	Зайцева Н.В. ....	23	Никулин Е.И. ....	93
Афанасьев Н.А. ....	31	Заночкин А.Ю. ....	17	Никулин Л.Р. ....	53
Барашков И.С. ....	81	Захаров В.О. ....	68	Обросова Н.К. ....	15
Белянкина Т.В. ....	88	Захарова Т.В. ....	108, 109	Ожигов Ю.И. ....	57
Берговин А.К. ....	106	Зизов В.С. ....	101	Орлов А.О. ....	94
Богомоллов С.В. ....	39	Зотов И.В. ....	30	Орлов М.В. ....	114
Большакова Е.И. ....	47	Изюмова Д.Д. ....	47	Орлов С.М. ....	114
Борисов В.Д. ....	73	Казачук М.А. ....	65, 66	Отакулов С. ....	113
Будзинский С.С. ....	42	Каплан В.С. ....	85	Павельева Е.А. ....	80
Буряк Д.Ю. ....	59	Капустин Н.Ю. ....	19	Паршиков М.В. ....	16
Бухман А.В. ....	104	Кирсанова С.И. ....	67	Пахненко И.П. ....	108
Быков А.А. ....	91, 100	Киселёв Ю.Н. ....	114	Петрова Л.И. ....	36
Валеев А.Р. ....	87	Клименко В.К. ....	109	Петровский М.И. ....	67
Валиахметов Б.И. ....	44	Копнина И.А. ....	43	Покладюк А.Ю. ....	32
Ван Г.С. ....	107	Коровина М.В. ....	22	Полевой А.В. ....	51
Васильев С.М. ....	72	Корухова Ю.С. ....	51, 52	Полосин А.А. ....	20
Васин А.А. ....	83	Крылов П.А. ....	10	Полякова И.Н. ....	53, 54
Вахрушев В.Ю. ....	59	Кувшинников А.Е. ....	39	Попов А.М. ....	30
Величкин М.С. ....	75	Кудрявцев А.А. ....	105	Попов Е.А. ....	102
Ветров А.Г. ....	56	Куковкина М.А. ....	107	Попов И.С. ....	65, 66, 68
Викторова Н.Б. ....	57	Кулевский А.В. ....	119	Попова Н.Н. ....	59
Владиминова Ю.С. ....	103	Лай Вэньтао. ....	48	Поспелова И.И. ....	84
Вострикова У.Ю. ....	78	Левашова Н.Т. ....	95, 97, 98	Разгулин А.В. ....	75
Вылиток А.А. ....	48	Леонов А.С. ....	90	Рогожин Д.А. ....	49
Высоцкий А.О. ....	9	Ли Ваншунь. ....	57	Романенко Т.Е. ....	78
Гайсин Р.Р. ....	62	Логинова М.М. ....	33	Рязанова Е.Б. ....	52
Гасанов М.Э. ....	45	Ложкин С.А. ....	101	Самарин А.И. ....	11
Герасимов С.В. ....	69, 70, 71, 72, 73	Лопушенко В.В. ....	76	Самсонов Д.С. ....	95
Головина С.Г. ....	77	Лукьяненко Д.В. ....	41, 97	Самсонов С.П. ....	116
Голубцов П.В. ....	58	Макаренко В.А. ....	110	Сат С.О. ....	84
Гончарова М.Н. ....	116	Матвеев С.А. ....	40, 42, 45	Семендяева Н.Л. ....	114
Горбачев А.В. ....	97	Машечкин И.В. ....	65, 66, 67	Серенкова А.Ю. ....	92
Горохов О.Е. ....	67	Мещеряков А.В. ....	69, 70, 71, 72, 73	Смирнов И.Н. ....	22
Горьков В.П. ....	117, 118	Мирпулатов И.П. ....	45	Смирнов М.А. ....	88
Грацианова Т.Ю. ....	49	Михайлов Е.А. ....	99	Смирнов М.С. ....	40
Григоренко Н.Л. ....	117, 118	Михельсон Г.В. ....	70	Смирнов С.Н. ....	17
Григорьева О.М. ....	83	Моисеев Е.И. ....	26	Собирова Г.Д. ....	113
Григорьева Э.В. ....	112	Морозов В.В. ....	86	Соболев С.И. ....	63
Даник Ю.Э. ....	96	Мухин С.И. ....	32	Соколов Д.Д. ....	92
Денисов А.М. ....	74	Мухина Ю.С. ....	120	Соловьёв А.Ю. ....	60
				Сорока А.Г. ....	69

Сорокина Н.В. ....	54	Ушаков В.Г. ....	106	Шананин А.А. ....	14
Сотников Д.М. ....	17	Фазылов Р.Р. ....	65	Шаров А.Н. ....	90
Сукманюк С.В. ....	44	Федотов М.В. ....	79	Шаршавин А.Д. ....	29
Султонов А.О. ....	42	Фомичев В.В. ....	9, 11	Шевцова И.Г. ....	110
Сурков П.Г. ....	115	Фурсов А.С. ....	10	Шеина Е.А. ....	28
Сучков Е.П. ....	27	Хайлов Е.Н. ....	112	Шестаков О.В. ....	105
Терновский В.В. ....	38	Харитонов Д.М. ....	79	Шинкарев В.Д. ....	41
Тимошкин М.А. ....	63	Хасаева Т.Т. ....	99	Широков И.А. ....	34
Тихомиров В.В. ....	24	Холмоева А.А. ....	25, 26	Широкова А.С. ....	55
Тихонов И.В. ....	82	Хохлов Ю.С. ....	107	Шишкин А.Г. ....	29
Точилин П.А. ....	16	Хруленко А.Б. ....	32	Шобухов А.В. ....	37
Трапезников М.Ю. ....	66	Цзянчуань Ю. ....	57	Шубин М.В. ....	59
Трофимов В.А. ....	33, 79	Цуканова М.А. ....	61	Шутова К.Ю. ....	13
Трофимов Д.А. ....	80	Цыбров Е.Г. ....	77	Юшков Е.В. ....	92
Трошиев Ю.В. ....	35	Чень Жань ....	57	Ягола А.Г. ....	41, 90
Трусов Н.В. ....	14	Чунжук Е.А. ....	98		
Уйданов П.В. ....	43	Шагиров Н.Э. ....	31		

*Для заметок*

