Вопросы по курсу

ВАРИАЦИОННЫЕ И ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

обязательный курс для магистров 1-ого года обучения (2018/2019)

осенний семестр

1. Задача минимизации функционала в гильбертовом пространстве. Полунепрерывные снизу функционалы в гильбертовом пространстве.
2. Корректность экстремальных задач в гильбертовом пространстве. Минимизирующие последовательности.
3. Корректность задачи о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве. Ортогональное разложение.
4. Необходимые условия для точек минимума функционалов. Производные по Фреше и Гато. Выпуклые функционалы.
5. Постановка краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Классическое решение. Теоремы единственности.
6. Краевая задача для уравнений Штурма-Лиувилля. Определение оператора краевой задачи. Понятие о расширении оператора. Классическое и обобщенное решения.
7. Краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа. Классическое решение. Теоремы существования и единственности.
8. Энергетический метод для положительно определённых операторов в гильбертовом пространстве. Теорема о функционале энергии.
9. Исследование задачи о минимуме функционала энергии. Пространства H_A .
10. Теорема о сходимости минимизирующей последовательности для функционала энергии.
11. Процесс Ритца построения минимизирующей последовательности энергетического функционала.
12. Теорема о сходимости метода Ритца.
13. Построение обобщенного решения краевой задачи Дирихле для уравнения Штурма-Лиувилля. Доказательство положительной определённости оператора краевой задачи.
14. Основные свойства обобщенного решения задачи Дирихле. Принадлежность решения задачи Дирихле пространству $H^1([a,b])$. Обобщённые производные.
15. Третья краевая задача для уравнения Штурма-Лиувилля. Положительная определённость оператора задачи. Построение минимизирующей последовательности. Естественные краевые условия.
16. Построение обобщенного решения для уравнения Пуассона с условиями Дирихле. Неравенство Фридрихса.
17. Третья краевая задача для уравнения Пуассона. Неравенство Фридрихса-Стеклова.
18. Задача Неймана для уравнения Пуассона. Неравенство Пуанкаре.
19. Постановка задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Понятие следа функции на границе. Обобщённое решение.
20. Пространство сплайнов для решения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Определение степенных сплайнов.
21. Степенные сплайны дефекта $\nu = 1$. Основные теоремы аппроксимации сплайнами первой степени дефекта $\nu = 1$.
22. Степенные эрмитовы сплайны третьей степени дефекта $\nu = 2$. Теоремы аппроксимации.

23. Применение сплайн-аппроксимации в методе Ритца для получения приближённых решений.
24. Сплайны первой степени в треугольной области. Триангуляция плоской области. Построение схем метода Ритца задачи Дирихле для уравнений Пуассона.
25. Билинейные сплайны в плоской области и их применение к построению приближенного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
26. Вариационные методы в линейной алгебре. Задача на собственные значения симметрического оператора в конечномерном евклидовом пространстве.
27. Минимаксное определение собственных значений в конечномерном евклидовом пространстве.
28. Задача на собственные значения для симметрического полуограниченного дифференциального оператора. Основные свойства собственных значений и собственных функций.
29. Теорема о спектре положительно определённого симметрического оператора в гильбертовом пространстве.
30. Метод Рэлея-Ритца построения приближённых решений спектральных задач.
31. Теорема о сходимости метода Рэлея-Ритца.
32. Применение метода Рэлея-Ритца к спектральной задаче Штурма-Лиувилля.
33. Метод Рэлея-Ритца для задачи на собственные значения для оператора Лапласа в плоской области.

Литература

1. Михлин С.Г. Прямые методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
2. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. М.: МИР, 1970.
3. Андреев В.Б. Лекции по методу конечных элементов. М.: МАКС-Пресс, 2010.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
5. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
6. Карчевский М.М., Павлова М.Ф. Уравнения математической физики. Дополнительные главы. СПб.: Изд-во «Лань»,2016.