

§9. Степенная функция и обратная к ней

9.1. Степенная функция с натуральным показателем

Степенная функция – это функция вида

$$w = z^n, \quad \text{где } n \in \mathbf{N}, n > 1. \quad (1)$$

Степенная функция определена при всех $z \in \mathbf{C}$; если положить $w(\infty) = \infty$, областью определения становится $\overline{\mathbf{C}}$.

Функция (1) отображает $\overline{\mathbf{C}}$ на себя, причем неоднолистно. В самом деле, для $z = r e^{i\varphi}$ ($z \neq 0, \infty$) справедливы равенства

$$z_1^n = z_2^n \Leftrightarrow r_1^n e^{in\varphi_1} = r_2^n e^{in\varphi_2} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2, \\ \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi k}{n}, \end{cases} \quad (2)$$

где $k = 0, 1, \dots, n-1$, так что n различных точек $z_k = r e^{i\varphi_k}$, где $\varphi_k = \varphi_0 + \frac{2\pi k}{n}$, имеют один и тот же образ.

Так как при любом $z \neq \infty$ существует непрерывная производная $w' = n z^{n-1}$, степенная функция аналитична в $\mathbf{C}$. Поскольку $w'(z) \neq 0$, если $z \neq 0$, отображение с помощью степенной функции конформно в любой точке $z \neq 0, \infty$.

Изучим поведение (1) в окрестности $z = 0$. Так как точке $z = |z| e^{i\varphi}$ соответствует $w = |w| e^{i\alpha} = |z|^n e^{in\varphi}$, имеем $|w| = |z|^n$, $\alpha = n\varphi + 2\pi k$. Поэтому полярная сетка плоскости (z) переходит в полярную сетку плоскости (w) следующим образом: луч $\arg z = \varphi$ отображается на луч, выходящий из точки $w = 0$ под углом $n\varphi$, а окружность $|z| = r$ переходит в окружность $|w| = r^n$, которая пробегается n раз. Таким образом, конформность в точке $z = 0$ нарушается.

Отображение (1) не является конформным также и в точке $z = \infty$.

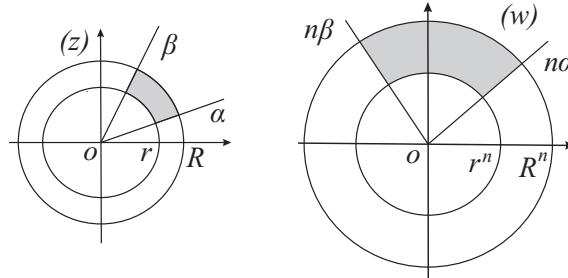


Рис. 30

Пусть $\arg z \in [0; 2\pi)$. Угол $\alpha < \arg z < \beta$ с вершиной в начале координат отображается на угол

$$n\alpha < \psi < n\beta, \psi \in \operatorname{Arg} w \quad (\text{рис. 30}).$$

Если $\beta - \alpha \leq \frac{2\pi}{n}$, то внутренность угла - область однолиственности степенной функции. Максимальной областью однолиственности является внутренность угла $\varphi_0 < \arg z < \varphi_0 + \frac{2\pi}{n}$, следовательно, эта область преобразуется с помощью (1) конформно. Пусть для простоты $\varphi_0 = 0$, тогда область $D_1 = \left\{ z : 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n} \right\}$ степенная функция конформно отображает на плоскость с разрезом по вещественной полупрямой $\mathbf{R}^+$. Тот же образ $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$ имеет любая из областей $D_k = \left\{ z : \frac{2\pi(k-1)}{n} < \arg z < \frac{2\pi k}{n} \right\}, k = 2, \dots, n$ (рис. 31). Итак, справедливо

Утверждение 1. Степенная функция $w = z^n$ аналитична в $\mathbf{C}$ и конформно отображает внутренность угла $\alpha < \arg z < \beta$, где $\beta - \alpha \leq \frac{2\pi}{n}$, на внутренность угла $n\alpha < \psi < n\beta$. В частности, любое из множеств D_k конформно отображается на $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$.

9.2. Функция $w = \sqrt[n]{z}$

Функция

$$w = \sqrt[n]{z}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad n > 1, \quad (3)$$

определяется как *обратная к степенной* функции $z = w^n$.

Функция (3) определена в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$, причём $w(0) = 0$, $w(\infty) = \infty$, а во всех остальных эта функция имеет по n значений

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\operatorname{Arg} z}{n}} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (4)$$

Плоскость $\mathbf{C}$ можно разбить на n множеств

$$\tilde{D}_k = \left\{ w : \varphi_0 + \frac{2\pi(k-1)}{n} < \arg w \leq \varphi_0 + \frac{2\pi k}{n} \right\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

внутренность каждого из которых D_k отображается степенной функцией $z = w^n$ на множество $G_k = G$, представляющее собой плоскость (z) с разрезом по лучу $\arg z = n\varphi_0$. Поэтому обратная n -значная функция (4) отображает G на совокупность множеств D_k .

На рис. 31 изображена ситуация, соответствующая $\varphi_0 = 0$, здесь $G = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$. При этом границами D_k являются лучи γ_{k-1} и γ_k ($\gamma_n = \gamma_0$), которые отображаются соответственно на "верхний берег" разреза Γ^+ и его "нижний берег" Γ^- .

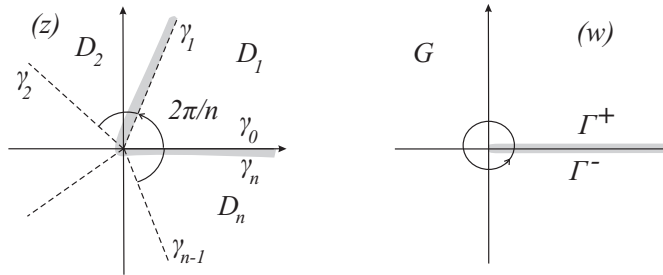


Рис. 31

В то же время, поскольку степенная функция на D_k однолистка, соответствие между D_k и $G_k = G$ взаимно однозначное, т.е. на множестве G определена однозначная функция, обратная степенной. Она задается одним из значений в (4): $w_k = (\sqrt[n]{z})_k$.

По теореме об аналитичности обратной функции в любой точке области G эта функция имеет производную

$$(\sqrt[n]{z})'_k = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{n w^{n-1}} = \frac{1}{n (\sqrt[n]{z})_k^{n-1}} \neq 0.$$

Итак, функция $w_k = (\sqrt[n]{z})_k$ аналитична в G и осуществляет конформное отображение этой области на D_k .

Определение. Однозначная аналитическая в некоторой области G функция $f(z)$ называется *однозначной регулярной ветвью* многозначной функции $F(z)$, определённой в этой же области, если значение $f(z)$ в каждой точке G совпадает с одним из значений $F(z)$ в этой точке.

В нашем случае в области $G = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$ можно выделить однозначную регулярную ветвь w_k функции (3), назвав, какое из множеств D_k соответствует G . Для этого достаточно зафиксировать значение k либо указать образ какой-нибудь точки $z \in G$.

Итак, получено

Утверждение 2. Функция $w = \sqrt[n]{z}$ в каждой точке $\overline{\mathbf{C}}$, кроме $z = 0$ и $z = \infty$, имеет ровно n значений. На множестве $G = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$ она допускает выделение n однозначных ветвей, каждая из которых аналитична в G и конформно отображает эту область на внутренность некоторого угла D_k .

9.3. Риманова поверхность

Многозначную функцию $w = \sqrt[n]{z}$ можно определить на некотором множестве более сложного устройства так, чтобы она стала однозначной.

Рассмотрим вместо G n идентичных ему множеств G_k ("листов") – образов соответствующих областей D_k при отображении $z = w^n$. Пусть Γ_k^+ и Γ_k^- – верхний и нижний берега разреза по $\mathbf{R}^+$ соответственно. Соединим эти листы в одну поверхность следующим образом: нижний берег G_1 "склеим" с верхним берегом G_2 , нижний берег G_2 "склеим" с верхним берегом G_3 и так далее. При этом отождествляются лучи Γ_k^- и Γ_{k+1}^+ , $k = 1, \dots, n-1$. Нижний берег последнего, n -го листа "склеим" с верхним берегом первого (рис. 32).

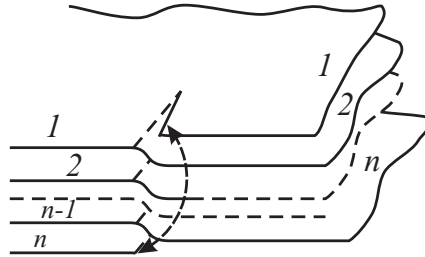


Рис. 32

Рассмотрим, как преобразуется функцией $z = w^n$ траектория точки, которая движется, начиная с нулевого угла, против часовой стрелки по некоторой окружности радиуса r в комплексной плоскости (w) (см. рис. 31). Точка-образ движется в том же направлении по окружности радиуса r^n , расположенной на полученной в результате "склеивания" поверхности. Центр окружности – начало координат; при движении точки внутри D_k её образ перемещается по k -му листу G_k , при переходе точки w через луч γ_k её образ z непрерывно проходит через склейку Γ_k^- с Γ_{k+1}^+ (рис. 32). Соответственно обратное отображение является однозначным.

Полученная конструкция называется *римановой поверхностью* функции $w = \sqrt[n]{z}$. Обозначим ее через $\mathcal{R}$.

Отображение $w : \mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ взаимно однозначно, причём точки $z = 0$ и $z = \infty$, общие для всех листов, переходят в $w = 0$ и $w = \infty$ соответственно. Функция $w = \sqrt[n]{z}$ является непрерывной на $\mathcal{R}$. При этом каждый лист ("этаж") $\mathcal{R}$ соответствует очередной регулярной однозначной ветви функции $w = \sqrt[n]{z}$.

Спроектируем риманову поверхность $\mathcal{R}$ на расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ и рассмотрим в ней некоторую окружность $k : |z| = R$. Замкнутый контур на $\mathcal{R}$, все точки которого проектируются на k , таков, что обойти его можно только переходя с одного листа $\mathcal{R}$ на другой и сделав в итоге n оборотов вокруг начала координат. В этом случае $z = 0$ является так называемой *точкой ветвления* функции $w = \sqrt[n]{z}$. Другими словами, некоторая точка z_0 – точка ветвления, если не существует охватывающего её замкнутого контура, принадлежащего только одному листу поверхности $\mathcal{R}$. Таким образом, в окрестности точки ветвления невозможно выделение регулярных однозначных ветвей многозначной функции.

Поскольку окружность k можно рассматривать и как контур, обходящий бесконечно удалённую точку, $z = \infty$ – также точка ветвления этой функции.

Отметим, что для любой другой точки z_0 в $\overline{\mathbb{C}}$ найдется окружность достаточно малого радиуса $|z - z_0| = r$, которой на $\mathcal{R}$ соответствуют n окружностей, не связанных друг с другом (каждая находится на своем листе римановой поверхности). Таким образом, изучаемая функция имеет ровно две точки ветвления.

Замечания. 1) Если при использовании многозначной функции $w = \sqrt[n]{z}$ не уточнено, какая из её однозначных ветвей применяется, будем рассматривать главную ветвь ($k = 0$).

2) Степень с рациональным показателем понимается следующим образом:

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{z} \right)^m, \quad m \in \mathbf{Z}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

9.4. Примеры

1) Выделить регулярную ветвь $f(z)$ функции $F(z) = \sqrt[3]{z}$, задаваемую условием $f(i) = -i$ и найти значение $f(-8)$.

▷ В окрестности любой точки, кроме $z = 0$ и $z = \infty$, возможно выделение регулярных однозначных ветвей многозначной функции $F(z) = \sqrt[3]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2\pi k}{3}}$, где $k = 0, 1, 2$. Поскольку

$$F(i) = e^{i \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right)} = -i = e^{i \frac{3\pi}{2}},$$

получаем $k = 2$. Значит, $f(z) = \sqrt[3]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 4\pi}{3}}$, так что

$$f(-8) = \sqrt[3]{8} e^{i \frac{\pi + 4\pi}{3}} = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - i\sqrt{3} \quad \triangleleft$$

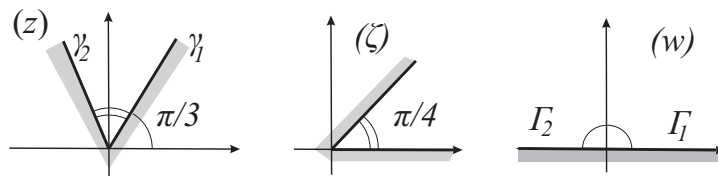


Рис. 33

2) Найти функцию, конформно отображающую на верхнюю полуплоскость

а) внутренность угла $\left\{ \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{7\pi}{12} \right\}$;

- b) верхний единичный полукруг $\{|z| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$;
- c) плоскость с разрезом по отрезку $[-i; i]$;
- d) верхнюю полуплоскость с разрезом $[0; ih]$, где $h > 0$;
- e) "луночку" $\{|z| < 1\} \cap \{|z - i| < 1\}$.

▷ a) Совершим поворот конфигурации на угол $\frac{\pi}{3}$ по часовой стрелке: $\zeta = e^{-\frac{\pi}{3}i} \cdot z$. Величина данного угла $\frac{\pi}{4}$, поэтому решение: $w = \zeta^4$, т. е. $w = e^{-\frac{4\pi}{3}i} \cdot z^4 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} z^4$. Последовательность преобразований показана на рис. 33 ◁

▷ b) Сделаем дробно-линейное преобразование $\zeta = L(z)$, при котором $(-1; 1; 0) \rightarrow (0; \infty; 1)$.

Тогда в результате преобразования $\zeta = \frac{z+1}{1-z}$ из полукруга получается первый квадрант, так как в силу конформности образы частей исходной границы ортогональны.

Теперь остаётся совершить преобразование $w = \zeta^2$, так что $w = \left(\frac{z+1}{1-z}\right)^2$ (см. рис. 34) ◁

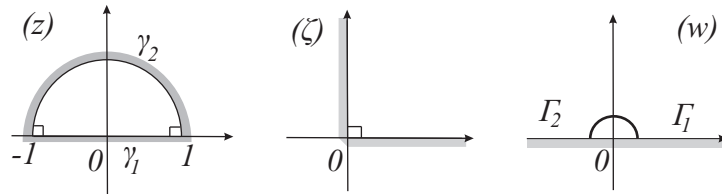


Рис. 34

▷ c) Сначала с помощью дробно-линейной функции $\zeta = L(z)$ отобразим данное множество на плоскость с разрезом по полуоси $\mathbf{R}^+$. Для этого достаточно тройку точек $(-i; 0; i)$ перевести в тройку $(0; 1; \infty)$; отсюда $\zeta = \frac{z+i}{i-z}$.

Завершается решение задачи применением преобразования $w = \sqrt{\zeta}$. Итак, окончательно $w = \sqrt{\frac{z+i}{i-z}}$. Последовательность отображений приведена на рис. 35 $\triangleleft$

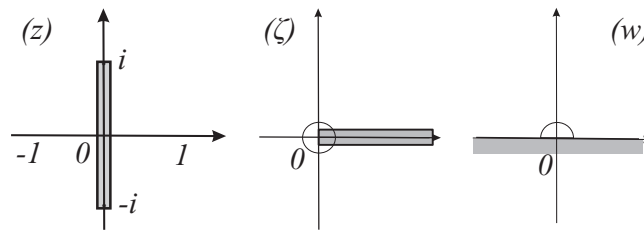


Рис. 35

$\triangleright$ d) Задача решается с помощью последовательности отображений (см. рис. 36): $\zeta = z^2$, $s = \zeta + h^2$, $w = \sqrt{s}$.

Таким образом, результирующее преобразование имеет вид: $w = \sqrt{z^2 + h^2}$ $\triangleleft$

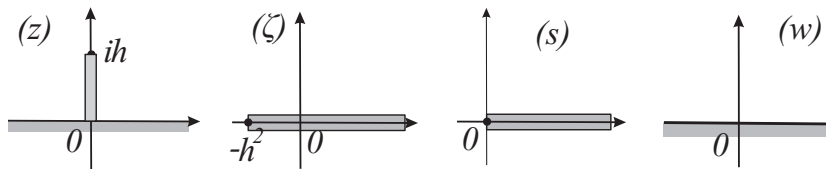


Рис. 36

$\triangleright$ e) Дробно-линейная функция $\zeta = L(z)$, удовлетворяющая условию $(z_1; 0; z_2) \rightarrow (0; 1; \infty)$, переводит данную область во внутренность некоторого угла (см. рис. 37). Остаётся развернуть этот угол до полуплоскости с помощью функции $w = \zeta^p$, где показатель p требуется определить.

Точки $z_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{3} + i}{2}$ можно найти как точки пересече-

ния окружностей $|z| = 1$ и $|z - i| = 1$. Тогда

$$\zeta = \frac{2z + (\sqrt{3} - i)}{2z - (\sqrt{3} + i)} \cdot e^{i \frac{4\pi}{3}}.$$

В силу конформности отображения $\zeta = L(z)$ угол φ , под которым пересекаются окружности в плоскости (z) , равен углу между лучами в плоскости ζ , т.е. $\varphi = \arg \zeta(i)$.

$$\zeta(i) = \frac{\sqrt{3} + i}{i - \sqrt{3}} \cdot e^{i \frac{4\pi}{3}} = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot e^{i \frac{4\pi}{3}} = e^{-i \frac{2\pi}{3}} \cdot e^{i \frac{4\pi}{3}} = e^{i \frac{2\pi}{3}},$$

следовательно, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Отсюда $p = \frac{3}{2}$, поэтому $w = \zeta^{3/2}$.

Итоговая формула преобразования такова:

$$w = \left(\sqrt{\frac{2z + (\sqrt{3} - i)}{2z - (\sqrt{3} + i)}} \right)^3 \cdot e^{i \frac{3}{2} \cdot \frac{4\pi}{3}} = \left(\sqrt{\frac{2z + (\sqrt{3} - i)}{2z - (\sqrt{3} + i)}} \right)^3 \triangleleft$$

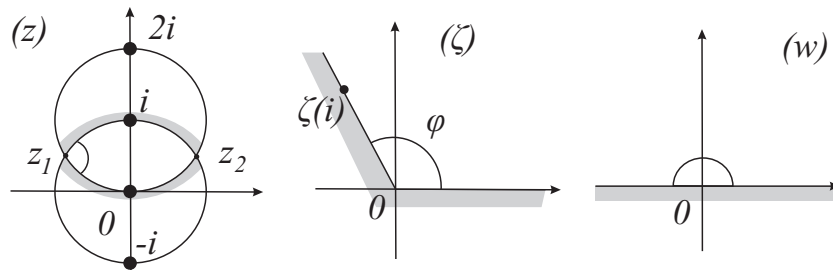


Рис. 37

§10. Показательная и логарифмическая функции

10.1. Показательная функция

Показательная функция имеет вид $w = e^z$, где

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (1)$$

а) Множество определения показательной функции – $\mathbf{C}$.

б) Показательная функция аналитична в $\mathbf{C}$.

в) Так как $w' = e^z \neq 0$, отображение, осуществляемое этой функцией, конформно в каждой точке $\mathbf{C}$.

г) Конформность отображения в области.

Показательная функция периодична с основным периодом $T = 2\pi i$, следовательно, неоднолистка в $\mathbf{C}$. Максимальной областью однолиственности является внутренность полосы вида $\{y_0 < \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi\}$. В этой области отображение $w = e^z$ конформно.

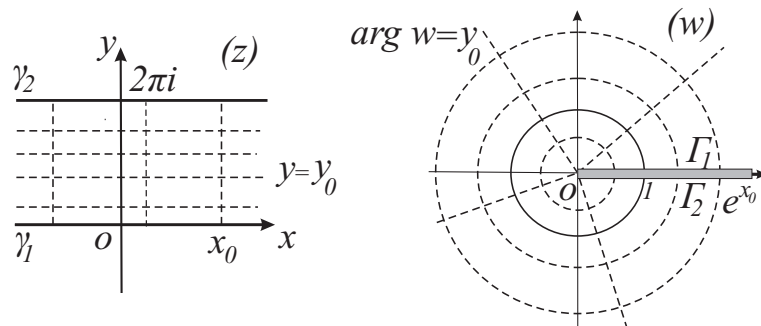


Рис. 38

Найдём, как преобразуется прямоугольная сетка в области $D_0 = \{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$.

Если $z = x + iy$, $w = |w|e^{i\arg w}$, то из (1) следует $|w| = e^x$, $\arg w = y$.

Поэтому образом прямой $y = c$ является луч $\arg w = c$. Границы D_0 – прямые $y = 0$ и $y = 2\pi$ – преобразуются в положительную вещественную полуось плоскости (w).

Вертикальный отрезок $x = c$, $0 < a \leq y \leq b < 2\pi$ переходит в дугу окружности $|w| = e^c$, $a \leq \arg w \leq b$, а весь отрезок $x = c$, $0 \leq y \leq 2\pi$ преобразуется в окружность $|w| = e^c$.

Итак, образом области D_0 является плоскость с разрезом $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$, а прямоугольная сетка в D_0 отображается на полярную сетку в $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$ (рис. 38). Точно так же преобразуется любая полоса $D_k = \{2\pi k < \operatorname{Im} z < 2\pi(k+1)\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Таким образом, имеет место

Утверждение 1. *Показательная функция (1) аналитична в $\mathbf{C}$ и конформно отображает внутренность любой полосы $D_k = \{2\pi k < \operatorname{Im} z < 2\pi(k+1)\}$ на плоскость с разрезом $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$.*

10.2. Логарифмическая функция

Логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ определяется как обратная к показательной функции $z = e^w$.

а) Функция определена на множестве $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ и является бесконечнозначной:

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i (\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (2)$$

При каждом фиксированном k получается однозначная ветвь логарифма $w_k = \ln |z| + i (\arg z + 2\pi k)$, где $\arg z \in [0; 2\pi)$. В области $G = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$ функция w_k непрерывна.

Однозначная регулярная ветвь функции (2) при $k = 0$ называется *главной* ветвью и обозначается

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

б) По теореме об аналитичности обратной функции $\forall z \in G$ существует производная

$$w'_k(z) = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z},$$

непрерывная G' , следовательно, w_k аналитична.

в) Конформность отображения функцией w_k в G .

Утверждение 2. Функция $w = \operatorname{Ln} z$ в каждой точке $\mathbf{C}$, кроме $z = 0$, имеет бесконечно много значений (2). На множестве $G = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$ она допускает выделение однозначных ветвей, каждая из которых аналитична в G и конформно отображает эту область на внутренность некоторой полосы D_k .

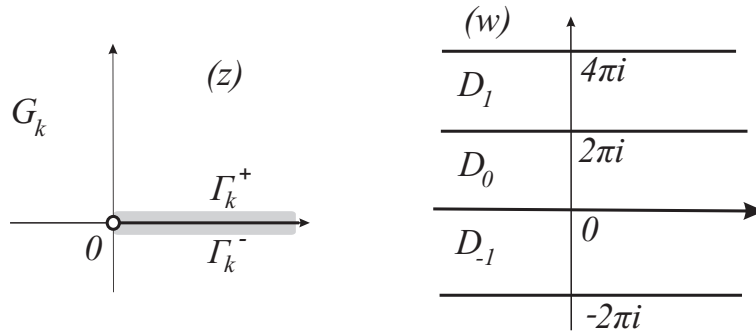


Рис. 39

10.3. Риманова поверхность

Рассмотрим плоскость $\mathbf{C}$ как совокупность множеств вида

$$\tilde{D}_k = \{w : 2\pi k < \operatorname{Im} w \leq 2\pi(k+1)\}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

(рис. 39), внутренность каждого из которых отображается функцией $z = e^w$ на множество $G_k = G = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$, а граница переходит в луч $\Gamma_k = \Gamma = \{z : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z = 0\}$.

Обозначим $\gamma_k = \{w : \operatorname{Im} w = 2\pi k\}$. Показательная функция переводит границы γ_k и γ_{k+1} полосы D_k соответственно на верхний берег Γ_k^+ и нижний берег Γ_k^- одного и того же разреза по вещественной положительной полупрямой плоскости (z). Рассмотрим бесконечное количество листов G_k и соединим их в одну поверхность, "склеивая" границы Γ_k^- и Γ_{k+1}^+ при всех $k \in \mathbf{Z}$. Так получается риманова поверхность $\mathcal{R}$ функции $w = \operatorname{Ln} z$. Отображение $w : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{C}$ взаимно однозначно и непрерывно, при этом каждый лист римановой поверхности соответствует очередной регулярной однозначной ветви логарифма. Точки $z = 0$ и $z = \infty$ (не принадлежащие $\mathcal{R}$) являются точками ветвления функции $w = \operatorname{Ln} z$.

Функция $w = \operatorname{Ln} z$ аналитична на $\mathcal{R}$. При этом любая однозначная ветвь, например $w = \ln z$, не является непрерывной на множестве $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ (но аналитична в $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$).

10.4. Примеры

1. Найти образ при отображении $w = e^z$ следующих множеств:

- полосы $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$;
- полуполосы $\left\{z : \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}\right\}$;
- прямоугольника $\{z : c < \operatorname{Re} z < d, a < \operatorname{Im} z < b\}$, где $0 < b - a < 2\pi$.

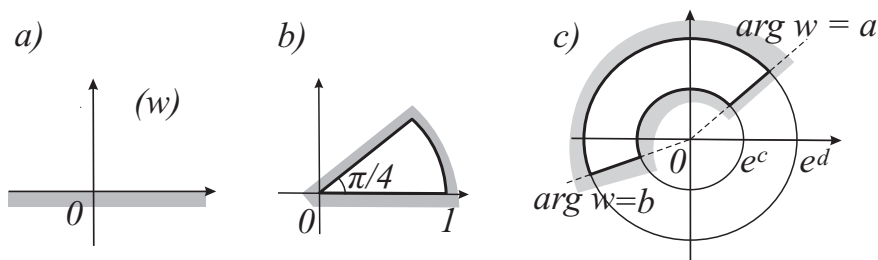


Рис. 40

2. Найти образ множества $\{z : |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении той однозначной ветвью $f(z)$ функции $F(z) = \operatorname{Ln} z$, для которой $f(ei) = 1 - \frac{3\pi}{2}i$.

▷ Так как

$$\operatorname{Ln}(ei) = \ln e + i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) = 1 + i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right),$$

условие задачи выполнено при $k = -1$. Поэтому данная область отображается на подмножество полосы D_{-1} .

Ответ на рис. 41 ◁

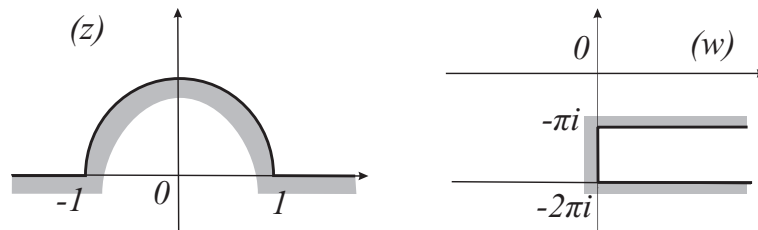


Рис. 41

§11. Функция Жуковского

11.1. Определение и основные свойства

Функция Жуковского имеет вид

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right). \quad (1)$$

Функция Жуковского (обозначим ее для краткости $G(z)$) определена при всех $z \in \mathbf{C}$, кроме $z = 0$. После доопределения $G(0) = G(\infty) = \infty$ имеем отображение $G: \overline{\mathbf{C}} \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$.

Функция (1) аналитична в $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, причем $w' = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)$.

Так как $w' \neq 0$ при $z \neq \pm 1$, то в каждой точке $\mathbf{C}$, кроме $z = 0, z = \pm 1$, отображение посредством функции Жуковского конформно.

Можно показать, что в точках $z = 0$ и $z = \infty$ также имеется конформность.

Функция $G(z)$ двулистка на области определения. В самом деле, для $z_1 \neq z_2$ имеем

$$G(z_1) = G(z_2) \Leftrightarrow z_1 - z_2 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2} \Leftrightarrow z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow z_2 = \frac{1}{z_1}.$$

Таким образом, всякая область, одновременно не содержащая точек z и $\frac{1}{z}$, является областью однолистности функции $G(z)$. Максимальные области однолистности суть $D_1 = \{|z| > 1\}$ – внешность единичного круга и $D_2 = \{|z| < 1\}$ – внутренность единичного круга, а также $D_3 = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ – верхняя полуплоскость и $D_4 = \{\operatorname{Im} z < 0\}$ – нижняя полуплоскость.

Утверждение 1. Функция Жуковского (1) аналитична в $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ и осуществляет конформное отображение любой из областей D_k , $k = 1, \dots, 4$.

11.2. Отображения областей D_k

Пусть $z = r e^{i\varphi}$, тогда

$$\begin{aligned} w = u + iv &= \frac{1}{2} \left(r e^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi + \frac{i}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \\ v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \end{cases} \quad (2)$$

Используя основное тригонометрическое тождество, исключим из этой системы φ :

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4} \left(r + \frac{1}{r} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left(r - \frac{1}{r} \right)^2} = 1. \quad (3)$$

С другой стороны, из (2) следует

$$\frac{u}{\cos \varphi} = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), \quad \frac{v}{\sin \varphi} = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right),$$

поэтому

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1. \quad (4)$$

Уравнение (3) при каждом $r > 0, r \neq 1$, задает эллипс с фокусами в точках $w = \pm 1$ и полуосями $a = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)$, $b = \frac{1}{2} \left| r - \frac{1}{r} \right|$; уравнением (4) для $\varphi \neq \frac{\pi}{2} k$ описывается семейство софокусных гипербол.

Рассмотрим в D_1 множество концентрических окружностей $|z| = r$, $r > 1$. Их образы – эллипсы – при $r \rightarrow 1$ уменьшаются и в пределе дают отрезок $[-1; 1]$. Лучи в D_1 , ортогональные окружностям, переходят в гиперболы (4), ортогональные в силу конформности отображения эллипсам (3).

Точнее, из (2) следует, например, что при перемещении точки z по лучу: $z = r e^{i\varphi_0}$, $r > 1$, $\varphi_0 \in (0; \frac{\pi}{2})$, ее образ движется по верхней части правой ветви гиперболы. Исключённые выше из рассмотрения лучи $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ ($r > 1$) переходят в части вещественной прямой $\operatorname{Re} w > 1$ и $\operatorname{Re} w < -1$, а лучи $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ – в мнимые полуоси $\operatorname{Im} w > 0$ и $\operatorname{Im} w < 0$ соответственно. Также из (2) вытекает, что движению против часовой стрелки по окружности соответствует движение в том же направлении по эллипсу (рис. 42).

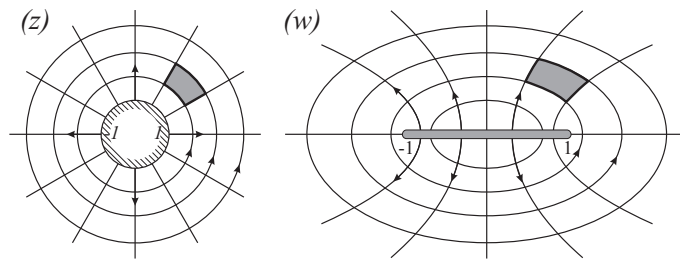


Рис. 42

Итак, функция Жуковского конформно отображает внешность единичного круга $D_1 = \{|z| > 1\}$ на внешность отрезка $[-1; 1]$ плоскости (w). При этом образом окружности $r = 1$ является дважды проходимый отрезок $[-1; 1]$.

Поскольку при замене r на $\frac{1}{r}$ эллипс (3) остается тем же самым (меняется направление движения по нему), можно утверждать, что функция $G(z)$ конформно отображает внутренность единичного круга $D_2 = \{|z| < 1\}$ на внешность отрезка $[-1; 1]$, причём окружность $r = 1$ преобра-

зается в отрезок $[-1; 1]$, проходимый дважды (рис. 43).

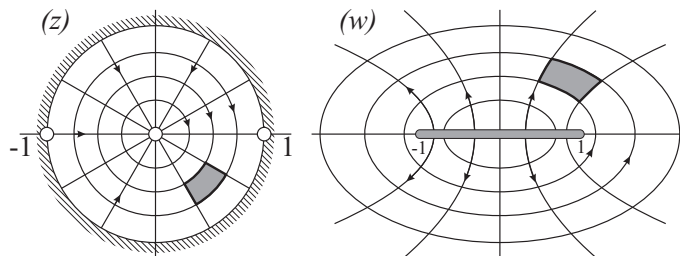


Рис. 43

Чтобы найти образ области $D_3 = \{\operatorname{Im} z > 0\}$, исходя из общих свойств конформных отображений, достаточно выяснить образ границы верхней полуплоскости – вещественной оси. Заметим, что при $z \in \mathbf{R}$ также и $G(z) \in \mathbf{R}$, причём либо $G(z) \geq 1$, либо $G(z) \leq -1$, поэтому при движении в плоскости (z) по частям $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ действительной прямой в плоскости (w) получаются последовательно лучи вещественной оси $I^- = \{\operatorname{Re} w \leq -1\}$ дважды и $I^+ = \{\operatorname{Re} w \geq 1\}$ также дважды (рис. 44).

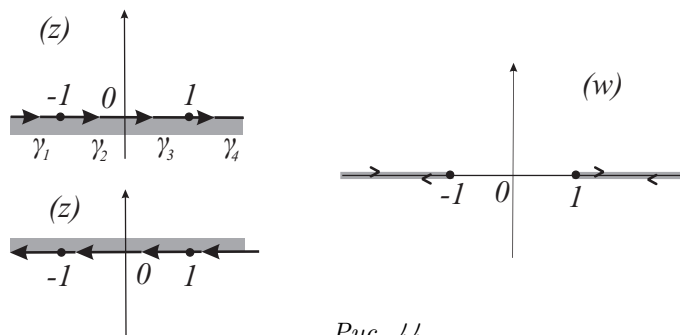


Рис. 44

Итак, функция Жуковского конформно отображает верхнюю полуплоскость $D_3 = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ на внешность лучей $\mathbf{C} \setminus (I^- \cup I^+)$, причём образом границы $\operatorname{Im} z = 0$ являются эти лучи, проходимые дважды.

Нетрудно показать, что при этом на верхнюю полуплоскость отображается внешность верхнего единичного полуокруга $\{|z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, а на нижнюю – его внутренность. Тот же образ $\mathbf{C} \setminus (I^- \cup I^+)$, имеет и нижняя полуплоскость D_4 , однако на верхнюю полуплоскость функция Жуковского отображает внутренность нижнего единичного полуокруга $\{|z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$, а на нижнюю – его внешность (рис. 44).

11.3. Примеры

1. Найти образ области $D = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении $w = G(z)$.

▷ Полуокружность γ_1 функцией Жуковского отображается на отрезок $\Gamma_1 = \{-1 \leq \operatorname{Re} w \leq 1\}$ вещественной прямой; радиус $\gamma_2 = \{0 < \operatorname{Re} z \leq 1\}$ – на луч $\Gamma_2 = I^+$, а радиус $\gamma_3 = \{-1 \leq \operatorname{Re} z < 0\}$ – на луч $\Gamma_3 = I^-$. Учитывая сохранение ориентации границы относительно области при конформном отображении, имеем $G(D) = \{\operatorname{Im} w < 0\}$ (рис. 45) ◁

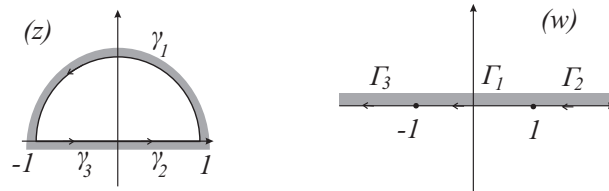


Рис. 45

2. Отобразить единичный круг $\{z : |z| < 1\}$ с разрезом $\{\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z = 0\}$ на верхнюю полуплоскость.

▷ Задачу решает следующая последовательность преобразований (см. рис. 46).

а) $\zeta = G(z)$, здесь $\zeta(1) = 1$, $\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$;

б) $s = L(\zeta)$, где дробно-линейная функция L определяется отображением тройки $\left(-1; 0; \frac{5}{4}\right) \rightarrow (0; 1; \infty)$ и имеет вид $s = -\frac{5(\zeta + 1)}{4\zeta - 5}$;
 в) $w = \sqrt{s}$.

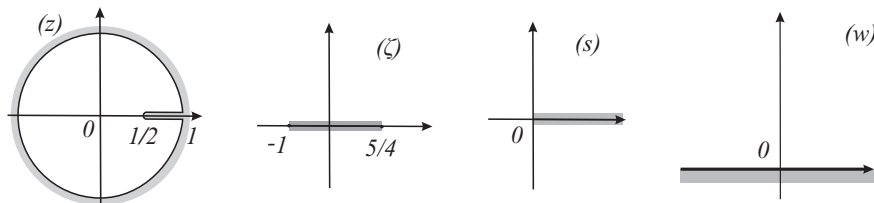


Рис. 46

Тогда окончательно: $w = \sqrt{-\frac{5(z^2 + 2z + 1)}{2(2z^2 - 5z + 2)}} \quad \triangleleft$

3. Найти образ области $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении $w = \cos z$.

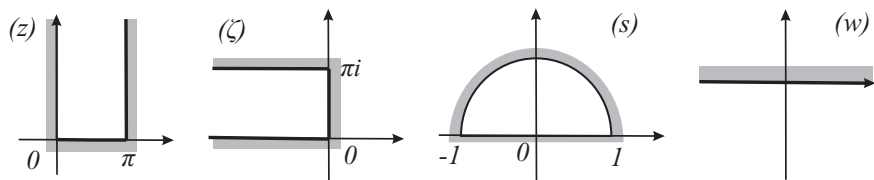


Рис. 47

▷ Так как $w = \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = G(e^{iz})$, совершаем последовательность отображений (рис. 47):

а) $\zeta = iz$ – поворот на угол $\frac{\pi}{2}$; б) $s = e^\zeta$ – результатом является верхний единичный полукруг; в) $w = G(s)$ – получается нижняя полуплоскость $\triangleleft$